СПРАВОЧНИК

С. М. АПОЛЛОНСКИЙ

СПРАВОЧНИК по расчету электромагнитных экранов

ЭНЕРГОАТОМИЗДАТ

С.М. АПОЛЛОНСКИЙ

СПРАВОЧНИК
по расчету электромагнитных экранов

Ленинград
ЭНЕРГОАТОМИЗДАТ
Ленинградское отделение
1988

ББК 31.211
А76
УДК 621.318.3(035.5)

Рецензент *В. В. Федоров*

Редактор *В. Н. Михаикова*

Аполлонский С. М.

А76 Справочник по расчету электромагнитных экранов.— Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1988. — 224 с.: ил.

ISBN 5-283-04390-8

Рассматриваются задачи расчета электромагнитных экранов при воздействии на них статических и квазистатических низкочастотных магнитных полей: однородных и неоднородных. Приводятся формулы для расчета эффективности экранирования и функций обратного действия оболочек простых и сложных геометрических форм и неоднородных.

Предназначена для инженерно-технических работников, занимающихся прикладными вопросами теории электромагнитного поля и расчетом экранирующих оболочек, может быть полезна для студентов вузов.

А $\frac{2302010000-117}{051(01)-88}$ 124—88 **ББК 31.211**

ISBN 5-283-04390-8

ВВЕДЕНИЕ

Для снижения напряженности помехонесущих постоянных магнитных полей и электромагнитных полей широкого частотного спектра используются различные способы пассивного экранирования. Установка экранирующих оболочек может производиться либо в непосредственной близости от объекта, на который воздействуют внешние поля, либо от источника напряженности электромагнитного поля, либо, наконец, экранируется помещение, в котором размещены эти источники.

Точность расчета функций электромагнитного поля элементов электрооборудования при наличии металлических включений и экранирующих оболочек будет высокой, если будут разработаны обоснованные методы расчета экранирующих функций того многообразия оболочек, которые встречаются в инженерной практике. Разработка же методов расчета оболочек, обеспечивающих эффективное снижение напряженности электромагнитного поля, представляет трудности.

При расчете экранирующих функций оболочек, как правило, используется общая теория электромагнитного поля, базирующаяся на уравнениях Максвелла, которые разрешаются для стенки экрана и окружающих сред, а на границах сопрягаются с помощью граничных условий. При изучении экранов сложной формы их представляют в виде набора экранов простых геометрических форм, экранирующий эффект которых поддается расчету. При этом нередко приходится исследовать физически неосуществимые, но более простые для анализа задачи, чтобы оценить напряженность электромагнитного поля, проникающего внутрь реальных конструкций, и учесть краевые эффекты, щели, отверстия и т. д. Для внешних однородных как постоянных магнитных полей, так и электромагнитных полей, экранирующие оболочки простых геометрических форм были рассчитаны в конце XIX и в начале XX вв. Работы по устранению неточностей методов расчета оболочек простых геометрических форм публикуются и в настоящее время.

В меньшей степени рассмотрены задачи экранирования оболочек, находящихся в неоднородных полях. Экранирующие функции зависят здесь от места расположения источника напряженности поля, ориентации поля и являются функциями координат.

Для расчета экранирующих функций оболочек в неоднородных полях был разработан [50] метод, основанный на теории длинной линии. Метод базируется на аналогии между уравнениями распространения электромагнитных волн через бесконечной протяженности плоскую оболочку и известными уравнениями длинной линии. Несмотря на существенные дефекты, такие, как применимость этого метода лишь для плоских бесконечных пластин при нормальном падении электромагнитного поля, когда составляющие электрической и магнитной напряженности поля взаимно перпендикулярны и можно пользоваться скалярным волновым полным сопротивлением, а временную фазу определять, исходя из направления вектора Пойнтинга, метод широко распространен. Это связано с его положительными качествами: возможностью использования для широкого класса экранирующих оболочек, возможностью получения аналитических решений, наглядностью при применении в инженерной практике. Неточности метода теории длинной линии в дальнейшем исключены в работах [28, 51 и др.].

Метод теории цепи, как частный случай метода теории поля, впервые использован при решении задач экранирования В. Гаком и В. Герцогом [10]. При этом экран представлялся электрической цепью с заданными индуктивностью, взаимной индуктивностью и т. д. Заменяя экран четырехполюсником, а воздействующее электромагнитное поле источником с некоторым внутренним сопротивлением, зависящим от конфигурации и материала экрана, определяли эффективность экранирования. Недостатками метода являются: необходимость определения параметров схемы замещения из решения уравнений Максвелла; возможность его использования с заданной точностью лишь при низких частотах, когда можно пренебречь поверхностными эффектами. Преимущество — возможность построения моделей аналоговых цепей для исследования изменений эффективности экранирования оболочек в широком диапазоне изменения параметров, как геометрических, так и электромагнитных.

В справочнике основное внимание уделено расчету экранирующих функций оболочек, ограниченных координатными поверхностями, в неоднородных помехонесущих полях. Наряду с известными методами используется метод эквивалентирования, хорошо реализуемый для тонкостенных оболочек и сводящийся к тому, что поле в металле оболочки исключается из рассмотрения и точные граничные условия по обе стороны металлической оболочки заменяются приближенными на срединной поверхности экрана. Такие условия учитывают форму, размеры и параметры материала оболочки. Уравнения Максвелла интегрируются для непроводящей электрический ток среды. Это дает возможность ограничиться при рассмотрении скалярными потенциалами, заданными по обе стороны экранирующей конструкции. Таким образом, задачи для постоянных магнитных полей и квазистационарных низкочастотных электромагнитных полей сводятся к уравнению Лапласа для скалярного магнитного потенциала при использовании приближенных условий на границе раздела сред. Решения задач для получения экранирующих функций сведены к расчету бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, методы численного исследования которых известны. Для однослойных или многослойных концентрических оболочек, ограниченных однотипными координатными поверхностями, получены формулы для расчета экранирующих функций по гармоникам, использование которых не встречает затруднений.

Изложение материала справочника проведено с единой методологической позиции, доступной для широкой аудитории специалистов, занимающихся вопросами электромагнитной совместимости и экранирования помехонесущих электромагнитных полей. В связи с тем, что в книге отсутствуют частные задачи по расчету оболочек, каждая глава (иногда — параграф) начинается с изложения общего метода расчета, используя который можно получить решение конкретной задачи.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ЭКРАНИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ ЭЛЕКТРООБОРУДОВАНИЯ

1-1. РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННОСТИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Уравнения Максвелла. В природе существуют два типа источников поля: токи и заряды. При их наличии в пространстве устанавливается возбужденное состояние, называемое электромагнитным полем, оно характеризуется векторами магнитной **H** и электрической **E** напряженностей, определяемыми в каждой точке среды. Пространственные и временные производные векторов **H** и **E** связаны уравнениями Максвелла, выполняемыми в каждой точке среды с непрерывными физическими свойствами:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \gamma\mathbf{E} + \frac{\partial \varepsilon \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j}^{(0)}; \tag{1-1}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mu \mathbf{H}}{\partial t}; \tag{1-2}$$

$$\operatorname{div}\varepsilon\mathbf{E} = \rho_0; \tag{1-3}$$

$$\operatorname{div}\mu\mathbf{H} = 0, \tag{1-4}$$

где γ, μ и ε — электрическая проводимость, магнитная и диэлектрическая проницаемости среды; $\mathbf{j}^{(0)}$ — плотность стороннего тока, возбужденного источником; ρ_0 — плотность электрического заряда.

Для комплексных амплитуд **H** и **E** (точки над символами не проставляются) в монохроматических полях уравнения (1-1)—(1-2) приобретают вид

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\mathbf{E} + \gamma\mathbf{E} + \mathbf{j}^{(0)}; \tag{1-5}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}, \tag{1-6}$$

где $\omega = 2\pi/\lambda$; λ — длина волны. Уравнения (1-3)—(1-4) остаются без изменений.

В области пространства, где ε, μ, γ не зависят от координат и $\rho_0 = 0$, $\mathbf{j}^{(0)} = 0$, уравнения (1-5), (1-6) с учетом (1-3), (1-4) сводятся к уравнениям Гельмгольца для напряженностей **H** и **E**:

$$\Delta\mathbf{H} + k^2\mathbf{H} = 0; \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0; \tag{1-7}$$

$$\Delta\mathbf{E} + k^2\mathbf{E} = 0; \quad \operatorname{div}\mathbf{E} = 0, \tag{1-8}$$

где $k = \omega\sqrt{\varepsilon'\mu}$; $\varepsilon' = \varepsilon + (i\gamma/\omega)$ — комплексная диэлектрическая проницаемость $\left(i = \sqrt{-1}\right)$.

В уравнения (1-7), (1-8) входят шесть скалярных составляющих векторов **H** и **E**. При необходимости эти уравнения можно привести к виду с меньшим числом величин, определяющих поле, введением потенциалов поля.

В дальнейшем полное поле, являющееся результатом интерференции исходного поля и вторичного поля, возникающего при внесении экранирующей оболочки, будем представлять в виде двух слагаемых: падающего поля (например, поля диполя) и дифракционного (поля индуцированных токов в вакууме).

Векторный и скалярный потенциалы. Вектор магнитной напряженности **H** соленоидальный ($\operatorname{div}\mathbf{H}=0$), поэтому существует вектор **A**, такой, что

$$\mathbf{H}=\mu^{-1}\operatorname{rot}\mathbf{A}. \tag{1-9}$$

Одновременно вводится скалярная функция φ в виде

$$\operatorname{grad}\varphi=i\omega\mathbf{A}-\mathbf{E}. \tag{1-10}$$

Потенциалы **A**, φ определяются однозначно [16] и могут быть представлены в виде уравнений Гельмгольца:

$$\Delta\mathbf{A}+k^2\mathbf{A}=0; \tag{1-11}$$

$$\Delta\varphi+k^2\varphi=0. \tag{1-12}$$

Теперь поле представлено в виде четырех скалярных величин: потенциала φ и трех составляющих вектора **A**.

Электромагнитное поле в низкочастотном приближении. При рассмотрении задач по расчету полей в многосвязных областях наличие параметра малости kb (b — диаметр металлического тела или толщина оболочки) позволяет использовать прием, основанный на близости задачи дифракции к задачам магнитостатики и электростатики. Поля вблизи тела определяются в статическом ($k=0$) приближении, а затем расчет распространяется на все пространство по волновым законам.

Допустим, что малое тело или оболочка малой толщины помещены в электромагнитное поле и пусть линейный размер тела b мал по сравнению с длиной волны:

$$kb\ll 1;\quad b\ll\lambda. \tag{1-13}$$

Поместим начало сферической системы координат (r, θ, φ) где-либо внутри тела. Неравенства (1-13) означают, что существует область, где r удовлетворяет условиям

$$b\ll r\ll 2\pi/k, \tag{1-14}$$

т. е. область, размеры которой велики по сравнению с размерами тела и малы по сравнению с длиной волны. Для статических задач, к которым сейчас сводится задача дифракции, такие значения r бесконечно большие. Существование таких r, гарантированное условиями (1-13), есть следствие наличия в задаче двух разных масштабов: размеров тела и длины волны.

Во всей области, где $kr \ll 1$, в уравнениях Максвелла (1-5) и (1-6) члены $\operatorname{rot}\mathbf{H}$ и $\operatorname{rot}\mathbf{E}$, имеющие порядок $\mathbf{H}/r$ и $\mathbf{E}/r$, велики по сравнению с членами $k\mathbf{E}$ и $k\mathbf{H}$. В нулевом порядке по частоте эти уравнения могут быть заменены статическими уравнениями (для среды с $\gamma = 0$ и в точках, свободных от сторонних токов):

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}^{(0)} = 0; \quad \operatorname{rot}\mathbf{E}^{(0)} = 0. \tag{1-15}$$

На основании условий (1-15) напряженности $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$ могут быть представлены через магнитостатический v и электростатический u потенциалы в виде

$$\mathbf{H}^{(0)} = -\operatorname{grad} v; \quad \mathbf{E}^{(0)} = -\operatorname{grad} u.$$

В соответствии с условиями $\operatorname{div}\mathbf{H}^{(0)} = 0$ и $\operatorname{div}\mathbf{E}^{(0)} = 0$ оба потенциала удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\Delta w = 0, \quad w = (v,\ u). \tag{1-16}$$

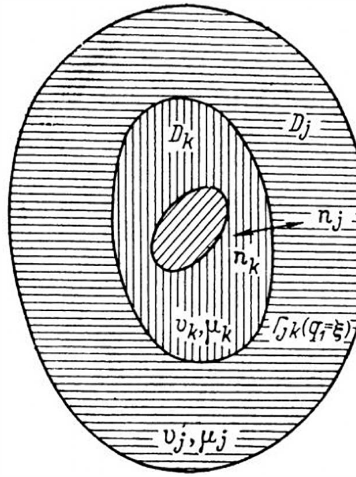
В теории низкочастотной дифракции, как и в любой другой физической теории, принимаются некоторые допущения, т. е. рассматриваются математические модели, облегчающие анализ реальных объектов. В данном случае уравнение Гельмгольца (1-12) для скалярного потенциала заменяется при $\omega = 0$ уравнением Лапласа (1-16). Поскольку в дальнейшем при реализации задач низкочастотного электромагнитного поля и постоянного магнитного поля будем пользоваться уравнением (1-16), граничные условия для напряженности поля на экранирующих оболочках также необходимо преобразовать в условия для потенциалов.

1-2. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛОВ ПОЛЯ НА МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Основные граничные условия для напряженности электромагнитного поля. Типичными для системы уравнений Максвелла являются задачи, в которых поле ищется в бесконечной области, в то время как причиной возникновения и поддержания поля являются процессы, происходящие в конечной части пространства. При этом граничные условия должны учитываться на поверхностях, разделяющих среды с разными свойствами, т. е. на поверхностях, где электромагнитные характеристики среды терпят разрыв первого рода. Должно также учитываться условие конечности энергии поля на краях поверхности и на линиях, где нарушается гладкость граничных поверхностей.

Фундаментальные граничные условия, связывающие векторы магнитной $\mathbf{H}$ и электрической $\mathbf{E}$ напряженностей на сторонах

Рис. 1-1. Многослойная ферромагнитная среда



границы раздела сред S, были установлены как следствие уравнений Максвелла с помощью формул Остроградского — Гаусса и Стокса [16]:

$$[\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)]|_S = 0; \quad (1\text{-}17)$$

$$[\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)]|_S = 0, \quad (1\text{-}18)$$

где $\mathbf{n}$ — единичная нормаль к граничной поверхности S; $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$ и $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ — векторы магнитной и электрической напряженностей поля соответственно до и за поверхностью S.

Уравнения Максвелла вместе с граничными условиями (1-17)—(1-18) позволяют однозначно найти напряженность поля в пространстве при задании начальных условий и некоторых дополнительных условий в бесконечности. Начальные условия необходимы в тех случаях, когда рассмотрению подлежат нестационарные поля. Условия в бесконечности трактуются следующим образом. Если среда обладает хотя бы минимальной проводимостью, условия для напряженности в бесконечности состоят в требовании обращения в нуль напряженности поля от любой системы источников, лежащих внутри конечной области. Если же проводимость среды равна нулю, то необходимо рассматривать условия Зоммерфельда, требующие, чтобы поле вне неоднородностей среды состояло лишь из волн, распространяющихся в бесконечность. Аналитическим признаком соблюдения условий Зоммерфельда является выполнимость предельных соотношений

$$\lim_{r \to \infty} r\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial r} - ik\mathbf{F}\right) = 0; \quad \lim_{r \to \infty} \mathbf{F} = 0, \qquad (1\text{-}19)$$

где $\mathbf{F}$ — любая из составляющих магнитной или электрической напряженности поля; r — радиальная координата в пространстве; k — волновое число. Заметим, что второе условие в (1-19) является следствием первого условия, а потому может быть опущено.

Условия для потенциалов постоянных магнитных полей на металлических оболочках. Такие условия широко используются в литературе (см., например, [16]) и для скалярного магнитного потенциала v на поверхности раздела Γ_{jk} (рис. 1-1) двух сред D_j и D_k представляются в виде [2]

$$\mu_k \frac{\partial v_k}{\partial q_1}\bigg|_{q_1=\xi} = \mu_j \frac{\partial v_j}{\partial q_1}\bigg|_{q_1=\xi} + \eta_m^{jk}; \tag{1-20}$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial q_2}\bigg|_{q_1=\xi} = \frac{\partial v_k}{\partial q_2}\bigg|_{q_1=\xi}; \quad \frac{\partial v_j}{\partial q_3}\bigg|_{q_1=\xi} = \frac{\partial v_k}{\partial q_3}\bigg|_{q_1=\xi}, \tag{1-21}$$

где η_m^{jk} — поверхностная плотность фиктивных магнитных масс на поверхности $\Gamma_{jk}(q_1=\xi)$:

$$\eta_m^{jk} = (\mu_k - \mu_j)(\mathbf{H}^{(0)},\ \mathbf{n}_j),$$

$\mathbf{n}_j$ — единичный вектор, нормальный к поверхности Γ_{jk}; q_1, q_2, q_3 — система ортогональных криволинейных координат; k, j — индексы принадлежности к средам D_k и D_j соответственно. К условиям (1-20) и (1-21) добавляются условия регулярности в бесконечности

$$v_j(M) \to 0, \quad M \to \infty. \tag{1-22}$$

Для обеспечения единственности решения краевой задачи

$$\rho_m = -(\mathrm{grad}\ \mu,\ \mathbf{H}^{(0)}), \tag{1-23}$$

где ρ_m — плотность фиктивных магнитных масс. С учетом (1-20)—(1-22) условия (1-21) заменяются одним граничным условием

$$v_j\,|_{q_1=\xi} = v_k\,|_{q_1=\xi}. \tag{1-24}$$

Приближенные граничные условия для потенциалов низкочастотных полей на металлических оболочках. Обычный подход к расчету напряженности поля в пространстве, частично заполненном проводящей средой (в частности, оболочкой, на которой рассеивается поле), состоит в отыскании решений уравнения для напряженности поля в оболочке и в окружающей воздушной среде, в сопряжении этих решений с учетом обычных граничных условий для напряженности на поверхности раздела сред. Интегрирование уравнений Максвелла для напряженности поля в материале ферромагнитной оболочки является сложной задачей. Задача усложняется для многослойных оболочек, поэтому в инженерных задачах целесообразно в тех случаях, когда это возможно, избегать таких процедур

В зависимости от геометрических размеров экранирующих оболочек и толщины поверхностного слоя (глубины, на которую проникает падающее поле) оболочки делятся на толстостенные и тонкостенные. Под толстостенными оболочками понимают такие, толщина Δ которых превышает толщину поверхностного слоя δ $(\delta < \Delta)$. Для расчета напряженности поля внутри этих оболочек необходимо проводить интегрирование уравнений Максвелла, что составляет значительные математические трудности. Под тонкостенными оболочками понимают такие, толщина Δ которых меньше толщины поверхностного слоя ($\delta > \Delta$). В этом случае решение задачи можно получить значительно быстрее, используя приближенные граничные условия для потенциалов поля в оболочке, причем результаты расчетов обладают бóльшей наглядностью. В связи с этим при решении инженерных задач стараются прибегать к приближенным граничным условиям даже в случае, когда оболочки не являются тонкостенными. Возникающие при таких допущениях неточности стараются учитывать.

Экранирующие оболочки, используемые в инженерной практике, как правило, являются тонкостенными. Кроме того, расчет напряженности дифрагированного и прошедшего через оболочку полей (не слишком высоких частот — $f < 10^5$ Гц) оболочек конечной толщины, соотнесенных с тонкостенными, не приводит к значительным погрешностям, а поэтому считается правомочным [2].

При решении векторных уравнений Максвелла для тонкостенных оболочек формулы содержат разности близких величин, а их приведение к удобному для расчета виду требует дополнительных затрат времени, не меньших, чем для решения основной задачи [8]. По этой причине для тонких слоев и оболочек более естественным представляется такой способ решения задачи, при котором условие малости толщины слоя или оболочки учитывалось бы в процессе решения. Осуществить это можно путем соответствующего преобразования граничных условий для напряженности поля на поверхности оболочки, а именно путем исключения из этих условий величин, характеризующих напряженность поля в самой оболочке, и установления непосредственной связи между величинами, характеризующими поля по обе стороны от оболочки. Первая попытка установления таких зависимостей для проводящих ферромагнитных оболочек сферического и цилиндрического типов была предпринята Н. С. Кошляковым [1].

На основании результатов работы [7] применительно к квазистационарным уравнениям Максвелла запишем

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \gamma \mathbf{E}; \tag{1-25}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu \mathbf{H}. \tag{1-26}$$

Рассмотрим тонкую металлическую оболочку с электрической проводимостью γ, магнитной проницаемостью μ, которая заключена между плоскостями $z = \Delta/2$ и $z = -\Delta/2$. Толщина оболочки Δ мала.

Вырежем из оболочки цилиндр V высотой Δ с осью, совпадающей с осью Oz (рис. 1-2). Пусть S_1 и S_2 — нижнее и верхнее основания цилиндра; $S_б$ — боковая поверхность цилиндра V; S — срединное сечение цилиндра плоскостью $z=0$; $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ — внешние нормали к S_1 и S_2 соответственно; $\mathbf{n}_0$ — нормаль к S, совпадающая с осью Oz; $\mathbf{n}_б$ — внешняя нормаль к боковой по-

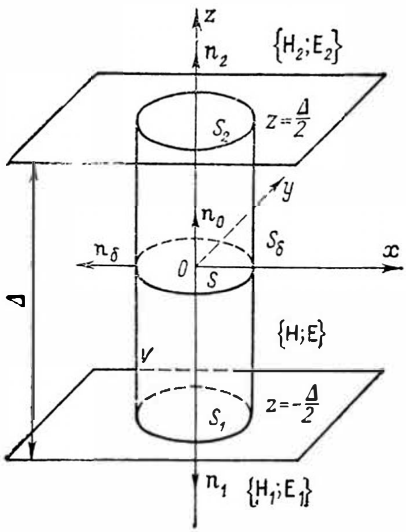


Рис. 1-2. Схема вывода приближенных граничных условий

верхности $S_б$ ($\mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_0$, $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_0$). В верхнем полупространстве $z > \Delta/2$ распространяется поле $\{\mathbf{H}_2;\ \mathbf{E}_2\}$, в нижнем полупространстве $z < -\Delta/2$ — $\{\mathbf{H}_1;\ \mathbf{E}_1\}$, в оболочке — $\{\mathbf{H};\ \mathbf{E}\}$.

Относительно напряженности поля $\{\mathbf{H};\ \mathbf{E}\}$ внутри оболочки могут быть сделаны некоторые предположения, основанные на физическом изучении структуры поля в оболочке.

1. Линейное поле.

Обозначим $\{\mathbf{H}_2;\ \mathbf{E}_2\} = \{\mathbf{H};\ \mathbf{E}\}|_{z=\Delta/2}$; $\{\mathbf{H}_1;\mathbf{E}_1\} = \{\mathbf{H};\ \mathbf{E}\}|_{z=-\Delta/2}$ и будем исходить из предположения, что поле линейно меняется по толщине оболочки, т. е. по координате z. В этом случае имеет место представление

$$\{\mathbf{H};\ \mathbf{E}\} = \left(\frac{z}{\Delta} + \frac{1}{2}\right)\{\mathbf{H}_2;\ \mathbf{E}_2\} - \left(\frac{z}{\Delta} - \frac{1}{2}\right)\{\mathbf{H}_1;\ \mathbf{E}_1\}. \quad (1\text{-}27)$$

2. Плоское ортогональное поле.

Предположим, что поле напряженностью $\{\mathbf{H};\ \mathbf{E}\}$ является линейной комбинацией плоских полей $\mathbf{e}_x \exp(\pm ikz)$ и $\mathbf{e}_y \times \times \exp(\pm ikz)$, которые распространяются ортогонально оболочке. Можно показать, что поле в этом случае имеет структуру

$$\{\mathbf{H};\ \mathbf{E}\} = \frac{\operatorname{sh} k(z+\Delta/2)}{\operatorname{sh} k\Delta}\{\mathbf{H}_2;\ \mathbf{E}_2\} - \frac{\operatorname{sh} k(z-\Delta/2)}{\operatorname{sh} k\Delta}\{\mathbf{H}_1;\ \mathbf{E}_1\}. \quad (1\text{-}28)$$

3. Плоское наклонное поле.

Будем считать, что поле напряженностью $\{\mathbf{H};\ \mathbf{E}\}$ является линейной комбинацией плоских полей

$$[(i\lambda\mathbf{e}_z \mp \eta\mathbf{e}_x)\exp(\pm\eta z + i\lambda x + i\beta y);$$
$$(i\beta\mathbf{e}_z \mp \eta\mathbf{e}_y)]\exp(\pm\eta z + i\lambda x + i\beta y),$$

которые распространяются в оболочке под углом θ_0 к оси Oz, где

$$\eta = (\lambda^2 + \beta^2 - k^2)^{1/2};\quad \frac{\pi}{2} > \arg\eta \geqslant -\frac{\pi}{2};\quad k = (1+i)(\omega\mu\gamma/2)^{1/2};$$

$\lambda = k\sin\theta_0\cos\varphi_0$; $\beta = k\sin\theta_0\sin\varphi_0$; $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ — декартовы орты.

В этом случае для напряженностей полей внутри оболочки имеет место представление

$$\{\mathbf{H};\ \mathbf{E}\} = \frac{\operatorname{sh}\eta(z+\Delta/2)}{\operatorname{sh}\eta\Delta}\{\mathbf{H}_2;\ \mathbf{E}_2\} - \frac{\operatorname{sh}\eta(z-\Delta/2)}{\operatorname{sh}\eta\Delta}\{\mathbf{H}_1;\ \mathbf{E}_1\}. \quad (1\text{-}29)$$

При точном решении задач дифракции электромагнитных полей на оболочке необходимо удовлетворять граничным условиям сопряжения на двух поверхностях $z = \Delta/2$ и $z = -\Delta/2$. Для упрощения расчета исключаем напряженности поля внутри оболочки на основании предположений о структуре поля (1-27)—(1-29).

В результате тонкую оболочку, представляющую собой слой, заменяем идеальной оболочкой, в данном случае — плоскостью $z = 0$. Исходные условия на границах слоя преобразуются в некоторые новые граничные условия на срединной поверхности $z = 0$ [2, 7]:

$$\begin{aligned} (\mathbf{n},\ \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)|_s &= -(\mathbf{n},\ \mathrm{rot}\, p\, [\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_1)])|_s; \\ (\mathbf{n},\ \mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_1)|_s &= (\mathbf{n},\ \mathrm{rot}\, q\, [\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)])|_s, \end{aligned} \tag{1-30}$$

где $p = \mu\Delta/(2\mu_0)$; $q = 2/(i\omega\mu_0\Delta\gamma)$; $\mathbf{n}$ — единичная нормаль к оболочке S, причем нормаль направлена в среду с полем $\mathbf{H}_2$ (рис. 1-3); μ_0 — магнитная проницаемость пустоты.

Если предположить, что напряженность поля в материале оболочки имеет структуру (1-28) или (1-29), то вид граничных условий (1-30) сохранится, причем

$$p = \mu\delta/(2\mu_0); \quad q = 2/(i\omega\mu_0\gamma\delta),$$

где $\delta = (2/k)\,\mathrm{th}\,(k\Delta/2)$, $k = (1+i)(\omega\mu\gamma/2)^{1/2}$ — для (1-28); $\delta = (2/\eta)\,\mathrm{th}\,(\eta\Delta/2)$, $\eta = -ik\cos\theta_0$ — для (1-29).

В дальнейшем считаем, что поля напряженностью $\mathbf{H}_j$ являются потенциальными ($\mathbf{H}_j = -\mathrm{grad}\, v_j$), тогда

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial(v_2 - v_1)}{\partial \mathbf{n}}\right|_s &= -F_0(p,\ v_2 + v_1)|_s; \\ \left.\frac{\partial(v_2 + v_1)}{\partial \mathbf{n}}\right|_s &= F_0(q,\ v_2 - v_1)|_s, \end{aligned} \tag{1-31}$$

где $F_0(p, v) = (\mathbf{n},\ \mathrm{rot}\, p\, [\mathbf{n} \times \mathrm{grad}\, v])$.

Если оболочка S однородная и имеет постоянную толщину Δ, то величины p и q — постоянные. В этом случае выражения (1-30) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} (\mathbf{n},\ \mathbf{H}_2)|_s &= -\Phi\,[t^- \mathbf{H}_2 + t^+ \mathbf{H}_1]|_s; \\ (\mathbf{n},\ \mathbf{H}_1)|_s &= \Phi\,[t^+ \mathbf{H}_2 + t^- \mathbf{H}_1]|_s, \end{aligned} \tag{1-32}$$

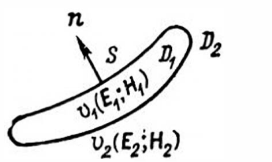


Рис. 1-3. Направление нормали к граничной поверхности

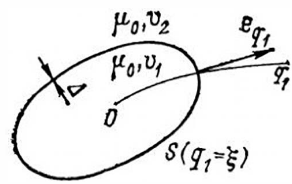


Рис. 1-4. Направление координаты q_1

где $\Phi[\mathbf{H}] = (\mathbf{n}, \operatorname{rot}[\mathbf{n} \times \mathbf{H}])$; $t^- = (p-q)/2$; $t^+ = (p+q)/2$.

Аналогично из выражений (1-31) получаем

$$\left.\frac{\partial v_2}{\partial \mathbf{n}}\right|_s = -F_0[t^- v_2 + t^+ v_1]|_s;$$
$$\left.\frac{\partial v_1}{\partial \mathbf{n}}\right|_s = F_0[t^+ v_2 + t^- v_1]|_s, \tag{1-33}$$

где $F_0[v] = (\mathbf{n}, \operatorname{rot}[\mathbf{n} \times \operatorname{grad} v])$.

Будем считать, что поверхность S совпадает с координатной поверхностью $q_1 = \xi$ ортогональной криволинейной системы координат (q_1, q_2, q_3). Пусть $\mathbf{e}_{q_1}$, $\mathbf{e}_{q_2}$, $\mathbf{e}_{q_3}$ — орты этой системы и орт $\mathbf{e}_{q_1}$ совпадает с нормалью $\mathbf{n}$ к S $(\mathbf{n} = \mathbf{e}_{q_1})$. Используя формулы для дифференциальных операторов в криволинейных координатах, перепишем условия (1-30) в переменных (q_1, q_2, q_3):

$$\left.\frac{\partial(v_2 - v_1)}{\partial q_1}\right|_{q_1=\xi} = -F(p, v_2 + v_1)|_{q_1=\xi};$$
$$\left.\frac{\partial(v_2 + v_1)}{\partial q_1}\right|_{q_1=\xi} = F(q, v_2 - v_1)|_{q_1=\xi}, \tag{1-34}$$

где $F(\rho, v) = \frac{h_{q_1}}{h_{q_2} h_{q_3}} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_2} \rho \frac{h_{q_3}}{h_{q_2}} \frac{\partial v}{\partial q_2} + \frac{\partial}{\partial q_3} \rho \frac{h_{q_2}}{h_{q_3}} \frac{\partial v}{\partial q_3} \right\}$; h_{q_β} $(\beta = 1, 2, 3)$ — коэффициенты Ламе; $\rho = (p, q)$. Необходимо отметить, что координата q_1 возрастает от поля с потенциалом v_1 в направлении поля с потенциалом v_2 (рис. 1-4).

Для выражения (1-3) имеем

$$(\partial v_2/\partial q_1)|_{q_1=\xi} = -F[t^- v_2 + t^+ v_1]|_{q_1=\xi};$$
$$(\partial v_1/\partial q_1)|_{q_1=\xi} = F[t^+ v_2 + t^- v_1]|_{q_1=\xi}, \tag{1-35}$$

где $F[v] = \frac{h_{q_1}}{h_{q_2} h_{q_3}} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_2} \frac{h_{q_3}}{h_{q_2}} \frac{\partial v}{\partial q_2} + \frac{\partial}{\partial q_3} \frac{h_{q_2}}{h_{q_3}} \frac{\partial v}{\partial q_3} \right\}$.

Рассмотрим тонкую оболочку, ограниченную координатными поверхностями $q_1 = \xi - \Delta_s/2$ и $q_1 = \xi + \Delta_s/2$, т. е. толщина оболочки — переменная величина. С точностью до величин второго порядка малости имеем [18]

$$\Delta \approx h_{q_1} \Delta_s, \quad \delta = h_{q_1} (2/k) \operatorname{th}(k\Delta_s/2), \quad \Delta_s \to 0. \tag{1-36}$$

Величину Δ_s можно рассматривать как толщину экрана в точке на поверхности $q_1 = \xi$, где $h_{q_1} = 1$.

С учетом (1-36) выражения (1-34) преобразуются к виду

$$\left.\frac{\partial(v_2 - v_1)}{\partial q_1}\right|_{q_1=\xi} = -F_1(p, v_2 + v_1)|_{q_1=\xi};$$
$$\left.\frac{\partial(v_2 + v_1)}{\partial q_1}\right|_{q_1=\xi} = F_2(q, v_2 - v_1)|_{q_1=\xi}, \tag{1-37}$$

где $p = \mu\Delta/(2\mu_0)$; $q = 2/(i\omega\mu_0\gamma\Delta)$;

$$F_1(p,\ v) = \frac{h_{q_1}}{h_{q_2} h_{q_3}} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_2} p \frac{h_{q_1} \partial_{q_3}}{h_{q_2}} \frac{\partial v}{\partial q_2} + \frac{\partial}{\partial q_3} p \frac{h_{q_1} h_{q_2}}{h_{q_3}} \frac{\partial v}{\partial q_3} \right\};$$

$$F_2(q,\ v) = \frac{h_{q_1}}{h_{q_2} h_{q_3}} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_2} q \frac{h_{q_3}}{h_{q_1} h_{q_2}} \frac{\partial v}{\partial q_2} + \frac{\partial}{\partial q_3} q \frac{h q_2}{h_{q_1} h_{q_3}} \frac{\partial v}{\partial q_3} \right\}.$$

Для теории оболочек представляет интерес случай, когда μ или γ относительно малые величины.

Для магнитных слабопроводящих оболочек $\omega\gamma \approx 0$, $q \to \infty$. Тогда выражения (1-37) преобразуются к виду

$$\left.\frac{\partial (v_2 - v_1)}{\partial q_1}\right|_{q_1=\xi} = -F(p,\ v_2 + v_1)|_{q_1=\xi}; \qquad (1\text{-}38)$$

$$(v_2 + v_1)|_{q_1=\xi} = 0.$$

Если проводящая оболочка не является ферромагнитной, то $p \approx 0$, откуда

$$\left.\frac{\partial (v_2 - v_1)}{\partial q_1}\right|_{q_1=\xi} = 0;$$

$$\left.\frac{\partial (v_2 + v_1)}{\partial q_1}\right|_{q_1=\xi} = F(q,\ v_2 - v_1)|_{q_1=\xi}. \qquad (1\text{-}39)$$

В зависимости от специфики задачи могут использоваться различные формы записи рассмотренных граничных условий.

Приближенные граничные условия для потенциалов поля на оболочках при резко выраженном поверхностном эффекте.

Граничные условия М. А. Леонтовича. При резко выраженном поверхностном эффекте электромагнитная волна, преломляясь на границе проводящего тела S, будет проникать в него в направлении, близком к нормали. Если тело имеет большую толщину и напряженность поля на его поверхности медленно меняется от точки к точке в масштабе длины волны, то радиус кривизны фронта электромагнитной волны внутри тела будет велик по сравнению с длиной волны и глубиной проникновения. Поэтому с достаточной точностью можно считать, что в каждой точке поверхности этого проводящего тела электромагнитная волна проникает в него почти так же, как плоская волна в проводящее пространство [2]:

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{E}]_s = (1 + i)\,[\omega\mu/(2\gamma)]^{0,5}\,[[\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \times \mathbf{n}]|_s, \qquad (1\text{-}40)$$

где μ и γ — магнитная проницаемость и электрическая проводимость материала оболочки; $\mathbf{n}$ — единичная нормаль к поверхности S, направленная в вещество экрана (рис. 1-5).

Соотношение (1-40) и представляет собой то краевое условие, которое приближенно выполняется при расчете напряженности на поверхности экрана, имеющего большую толщину. Это условие тем точнее, чем меньше глубина проникновения электромагнитной волны внутрь экрана, т. е. чем резче проявлен

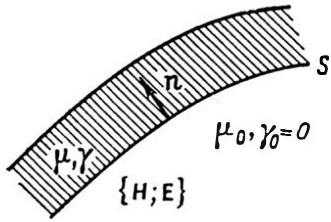


Рис. 1-5. К выводу граничных условий М. А. Леонтовича

поверхностный эффект. Использование условия (1-40) позволяет сформулировать задачу расчета напряженности поля в виде краевой задачи для области с одной стороны экрана без учета напряженности в экране.

Соотношение (1-40) применимо лишь при условии постоянства магнитной проницаемости внутри проводящего тела оболочки. Однако сама идея М. А. Леонтовича о приближенных граничных условиях для резко выраженного поверхностного эффекта имеет более широкую область применимости и может быть использована, когда учитывается зависимость магнитной проницаемости проводящей ферромагнитной оболочки от напряженности поля. Эта зависимость была установлена Л. Р. Нейманом [16], подтверждена экспериментальными и теоретическими исследованиями и имеет вид

$$[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]|_s = (1+0{,}6i)\,[\omega\mu_e(|\mathbf{H}|)/\gamma]^{1/2}\,[[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\times\mathbf{n}]|_s, \qquad (1\text{-}41)$$

где $\mu_e(|\mathbf{H}|)$ — магнитная проницаемость на поверхности оболочки S как функция вектора напряженности поля.

Поскольку в низкочастотной области решение краевой задачи для напряженности электромагнитного поля можно приближенно свести к краевой задаче для скалярного потенциала, условие (1-40) целесообразно переписать как граничное условие для скалярного потенциала. Для простоты будем считать, что поверхность S совпадает с плоскостью $z=0$, а $\mathbf{n}=\mathbf{e}_z$, тогда граничное условие (1-40) в декартовых координатах будет эквивалентно двум скалярным соотношениям при $z=0$:

$$\mathbf{E}_y = -z\mathbf{H}_x; \quad \mathbf{E}_x = z\mathbf{H}_y. \qquad (1\text{-}42)$$

Дифференцируя первое равенство по x, второе — по y и вычитая его из первого, получим

$$(\mathbf{n},\ \operatorname{rot}\mathbf{E}) = -z(\mathbf{n},\ \operatorname{rot}[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]).$$

Учитывая уравнение $\operatorname{rot}\mathbf{E}=i\omega\mu_0\mathbf{H}$ и представляя вектор магнитной напряженности поля через скалярный потенциал $\mathbf{H}=-\operatorname{grad} v$, получим окончательное граничное условие для скалярного потенциала низкочастотного поля

$$(\mathbf{n},\ \operatorname{rot}[\mathbf{n}\times\operatorname{grad} v]) + \alpha(\mathbf{n},\ \operatorname{grad} v)|_s = 0, \qquad (1\text{-}43)$$

где $\alpha=(1+i)\left[\omega\mu_0^2\gamma/(2\mu)\right]^{0,5}$; μ_0 — магнитная проницаемость среды вне экрана; μ и γ — характеристики материала экрана; потенциал v является решением уравнения Лапласа. Сопоставляя граничные операторы выражения (1-43) с оператором $F_0[v]$

[см. (1-33)], представим условие (1-43) в криволинейных координатах (q_1, q_2, q_3):

$$\left.\frac{\partial v}{\partial q_1}\right|_{q_1=\xi} = -(1/\alpha) F[v]|_{q_1=\xi}, \tag{1-44}$$

где координата q_1 возрастает в сторону экрана.

Граничные условия полного отражения. В предельном случае при $\gamma \to \infty$ условия (1-40) переходят в граничные условия полного отражения:

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{E}]|_s = 0. \tag{1-45}$$

т. е. граничные условия для напряженности электрического поля на поверхности идеально проводящего тела.

Условие (1-45) можно написать для напряженности магнитного поля в низкочастотной области приближения:

$$(\mathbf{n}, \mathbf{H})|_s = 0. \tag{1-46}$$

Вводя потенциал v, получим

$$(\mathbf{n}, \operatorname{grad} v)|_s = 0 \tag{1-47}$$

или

$$(\partial v/\partial q_1)|_{q_1=\xi} = 0. \tag{1-48}$$

Условия (1-45) и (1-46) отражают то, что касательная к поверхности оболочки — составляющая вектора напряженности магнитного поля больше нормальной составляющей, т. е. магнитные силовые линии стремятся огибать проводящее тело. Эти условия могут возникнуть при резко выраженном поверхностном эффекте и в ферромагнитных экранах вследствие неравенства $\mu \gg \mu_0$.

1-3. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ

При расчете напряженности электромагнитного поля в многосвязных областях при наличии металлических тел, ограниченных координатными поверхностями, краевые задачи целесообразно рассматривать в ортогональных криволинейных координатах (q_1, q_2, q_3). В этом случае запись граничных условий на разделяющих поверхностях упрощается Важное значение имеет и то, что исходные дифференциальные уравнения с частными производными, описывающие электромагнитные поля, допускают разделение переменных. Решение краевой задачи возможно представить через хорошо изученные специальные функции в виде рядов или в виде интегралов. Так, решения уравнения Лапласа для скалярного потенциала v (постоянные магнитные поля и низкочастотные квазистатические электромагнитные поля) могут быть представлены в виде рядов произведений поверхностных гармоник и координатных функций:

$$v = \sum_n \sum_m A_{nm} Y_{nm}(q_2, q_3) \begin{cases} F_{nm}(q_1), & q_1 \leqslant \xi; \\ P_{nm}(q_1), & q_1 > \xi, \end{cases} \tag{1-49}$$

где A_{nm} — постоянные интегрирования; $Y_{nm}(q_2, q_3)$ — поверхностные гармоники; $F_{nm}(q_1)$ и $P_{nm}(q_1)$ — координатные функции первого и второго рода, для которых существуют предельные соотношения:

$$F_{nm}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=0; \quad F_{nm}(\infty)=\infty;$$

$$P_{nm}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\infty; \quad P_{nm}(\infty)=0.$$

Представления постоянных A_{nm}, функций $F_{nm}(q_1)$, $P_{mn}(q_1)$, гармоник $Y_{mn}(q_2, q_3)$ в наиболее употребительных координатах даны в работах [1, 2].

Рассмотрим две криволинейные системы координат $(q_1^{(j)}, q_2^{(j)}, q_3^{(j)})$ $(j=1,\ 2)$ с различными началами O_j. Для каждой системы координат методом разделения переменных построим системы частных решений уравнения Лапласа для скалярного потенциала (1-16) вида (1-49):

$$u_{\nu\mu}(q_1^{(1)}, q_2^{(1)}, q_3^{(1)})=A_{\nu\mu}^{(1)}(q_1^{(1)})\,B_{\nu\mu}^{(1)}(q_2^{(1)})\,C_{\nu\mu}^{(1)}(q_3^{(1)}), \quad \nu\in N_1,\ \mu\in M_1; \tag{1-50}$$

$$v_{\alpha\beta}(q_1^{(2)}, q_2^{(2)}, q_3^{(2)})=A_{\alpha\beta}^{(2)}(q_1^{(2)})\,B_{\alpha\beta}^{(2)}(q_2^{(2)})\,C_{\alpha\beta}^{(2)}(q_3^{(2)}), \quad \alpha\in N_2,\ \beta\in M_2, \tag{1-51}$$

где ν, μ — постоянные разделения для системы координат с центром в точке O_1; α, β — постоянные разделения для системы координат с центром в точке O_2; N_j, M_j $(j=1,\ 2)$ — множества на комплексной плоскости, выбранные для каждой системы координат.

Теоремой сложения (формулой переразложения) называется формула, представляющая решения (1-50) в виде суперпозиции решений (1-51):

$$u_{\nu\mu}(q_1^{(1)}, q_2^{(1)}, q_3^{(1)})=\sum_{\alpha}\sum_{\beta}C_{\alpha\beta}^{\nu\mu}v_{\alpha\beta}(q_1^{(2)}, q_2^{(2)}, q_3^{(2)}), \tag{1-52}$$

где $(q_1^{(j)}, q_2^{(j)}, {}_3^{(j)})$ — координаты текущей точки. Для непрерывных параметров α и β знаки сумм заменяются на интегралы. Коэффициенты $C_{\alpha\beta}^{\nu\mu}$, как правило, выражаются через хорошо изученные специальные функции.

Теоремы сложения, наиболее интересные в отношении приложений к решению краевых задач экранирования для постоянных магнитных полей и низкочастотных квазистатических электромагнитных полей, представлены в работах [1, 2]. Такие теоремы позволяют свести решения краевых задач к решению бесконечных систем линейных алгебраических уравнений традиционными методами.

В справочнике теоремы сложения будут использоваться при нахождении экранирующих функций оболочек, находящихся в неоднородных полях, при решении задач экранирования комбинированными оболочками, при расчете неконцентрических экранирующих оболочек.

1-4. ИСТОЧНИКИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Внешние поля электрооборудования. Вокруг каждого элемента электрооборудования устанавливается либо постоянное магнитное поле, либо электромагнитное поле широкого частотного спектра. Представим, что вокруг элемента электрооборудования *1* описана поверхность второго порядка S_1 с радиусом ξ_1 и центром в точке O_1 (рис. 1-6). Введем ортогональную криволинейную систему координат $\left(q_1^{(1)},\ q_2^{(1)},\ q_3^{(1)}\right)$ с началом в точке O_1.

Если электрооборудование рассеивает постоянное магнитное поле или низкочастотное квазистатическое электромагнитное поле, то уравнения Максвелла, описывающие внешнее электромагнитное поле в пространстве около элемента, сводятся к уравнению Лапласа при помощи решения соотношения (1-16) для скалярного потенциала:

$$v^{\alpha}(O_1) = \sum_n \sum_m A^{\alpha}_{nm} Y_{nm}\left(q_2^{(1)},\ q_3^{(1)}\right) P_{nm}\left(q_1^{(1)}\right),\ q_1^{(1)} > \xi_1, \qquad (1\text{-}53)$$

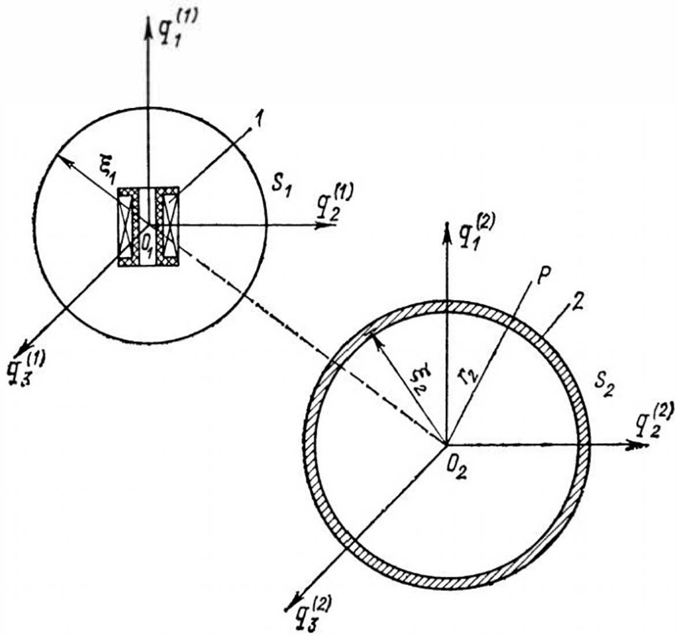


Рис. 1-6. Источник (*1*) напряженности электромагнитного поля и экранирующая оболочка (*2*)

где A^{α}_{nm} — постоянные интегрирования; $Y_{nm}\left(q_2^{(1)},\ q_3^{(1)}\right)$ — поверхностные гармоники; $P_{nm}\left(q_1^{(1)}\right)$ — координатные функции второго рода; индекс α определяет магнитное («м») или электрическое («э») поля; n, m — постоянные разделения.

Представление электромагнитного поля источника в виде магнитного $v^{м}(O_1)$ и электрического $v^{э}(O_1)$ потенциалов возможно, если рассматривать в низкочастотной области электрическое и магнитное поля независимо.

При решении задач экранирования методом теории поля в общем случае размещения источника электромагнитного поля с центром в точке O_1 и экранирующей системы с центром в точке O_2 (рис. 1-6) необходимо проводить переразложение потенциала v^{α} источника поля относительно точки O_2 — геометрического центра экранирующей оболочки S_2 — с помощью теорем сложения [2]:

$$v^{\alpha}(O_2)=\sum_{\beta}\sum_{\gamma}\sum_{n}\sum_{m}B^{nm}_{\beta\gamma}A^{\alpha}_{\beta\gamma}Y_{\beta\gamma}\left(q_2^{(2)},\ q_3^{(2)}\right)P_{\beta\gamma}\left(q_1^{(2)}\right), \tag{1-54}$$

где $B^{nm}_{\beta\gamma}$ — коэффициенты; β и γ — параметры (для непрерывных параметров β, γ знаки сумм заменяются на интегралы). Коэффициенты $B^{nm}_{\beta\gamma}$, как правило, выражаются через хорошо изученные специальные функции.

Потенциал $v^{\alpha}(O_2)$ в виде (1-54) является самым общим случаем произвольного электромагнитного поля, взаимодействующего с экранирующей системой, достаточно сложным для анализа. Поэтому при аналитическом расчете целесообразно использовать некоторые упрощения. Реальные поля электрооборудования целесообразно представлять в виде моделей — элементарных источников электромагнитного поля, состоящих из набора мультиполей и создающих в окружающем пространстве поля, адекватные реальным полям. Однако из-за сложностей геометрической интерпретации мультиполей высокого порядка обычно используют дипольные и квадрупольные модели [1]. Применение полей диполей вместо реальных полей источников дает возможность унифицировать методы расчета электромагнитных полей электроэнергетических установок с учетом экранирующих оболочек. Квадрупольные модели используют, когда с помощью диполей не удается адекватно описать реальные поля исследуемого оборудования.

При описании методов расчета экранирующих оболочек можно использовать три вида помехонесущих полей: однородное, дипольное и мультипольное.

Однородное поле. Это поле является частным случаем помехонесущего поля и может иметь вид:

постоянного магнитного поля с напряженностью $\mathbf{H}=\mathbf{H}^{(0)}$;

пульсирующего переменного магнитного поля с напряженностью $\mathbf{H}=\mathbf{H}^{(0)}\exp(-i\omega t)$; к такому полю можно отнести и плоскую волну, векторы **H** и **E** которой перпендикулярны направлению распространения волны;

вращающегося магнитного поля: постоянного $\mathbf{H} = \mathbf{H}^{(0)} \times \exp(-i\alpha\xi)$ и переменного $\mathbf{H} = \mathbf{H}^{(0)} \exp[-i(\alpha\xi + \omega t)]$, где $\alpha = \pi/\tau$, $\xi = \varphi$, τ — полюсное деление, φ — угловая координата.

Дипольное поле. Такое поле имеет место, когда элементарный диполь (электрический или магнитный) находится в геометрическом центре экранирующей оболочки или системы оболочек. Магнитный или электрический диполь $D[\mathbf{M}^\alpha(t)]$ можно рассматривать как вектор с тремя степенями свободы: три составляющие момента $\mathbf{M}^\alpha(t)$ диполя по осям системы координат. Момент диполя в квазистационарном приближении записывается в виде

$$\mathbf{M}^\alpha(t) = \mathbf{M}^\alpha \exp(-i\omega t). \tag{1-55}$$

Скалярный потенциал v^α низкочастотного диполя $D[\mathbf{M}^\alpha(t)]$ может быть определен из выражения [1]

$$v^\alpha = -[1/(4\pi\nu_\alpha)]\, \mathbf{M}^\alpha \operatorname{grad}(1/r_2), \tag{1-56}$$

где $\nu_\alpha = (\nu_м,\ \nu_э) = (\mu/\mu_0;\ \varepsilon/\varepsilon_0)$; r_2 — расстояние от точки O_2 (рис. 1-6), в которую помещен источник дипольного поля, до точки наблюдения P.

Дипольные поля можно представить в виде:

магнитного диполя, создающего постоянное магнитное поле с напряженностью $\mathbf{H}(\mathbf{H}_{q_\beta},\ \beta = 1,\ 2,\ 3)$, где

$$\mathbf{H}_{q_\beta} = -1/h_{q_\beta} \frac{\partial v^м}{\partial q_\beta}; \tag{1-57}$$

магнитного поля, создающего пульсирующее переменное магнитное поле с напряженностью $\mathbf{H}(\mathbf{H}_{q_\beta},\ \beta = 1,\ 2,\ 3)$, где

$$\mathbf{H}_{q_\beta} = -1/h_{q_\beta} \frac{\partial v^м}{\partial q_\beta} \exp(-i\omega t); \tag{1-58}$$

магнитного диполя, создающего вращающееся магнитное поле с напряженностью $\mathbf{H}(\mathbf{H}_{q_\beta},\ \beta = 1,\ 2,\ 3)$: постоянное, где

$$\mathbf{H}_{q_\beta} = -1/h_{q_\beta} \frac{\partial v^м}{\partial q_\beta} \exp(-\alpha\xi), \tag{1-59}$$

и переменное, где

$$\mathbf{H}_{q_\beta} = -1/h_{q_\beta} \frac{\partial v^м}{\partial q_\beta} \exp[-i(\alpha\xi + \omega t)]. \tag{1-60}$$

Мультипольное поле. Это общий случай помехонесущего поля, создаваемого электрооборудованием. Примером такого поля может служить диполь, смещенный относительно начала координат, — $D[\mathbf{M}^\alpha(t),\ \mathbf{r}_0]$. Он имеет шесть степеней свободы: три составляющие вектора момента $\mathbf{M}^\alpha(t)$ по осям системы координат, три — координаты вектора $\mathbf{r}_0$ размещения диполя.

Скалярный потенциал v^{α} произвольно ориентированного и смещенного в пространстве диполя может быть определен в системе координат $\left(q_1^{(2)}, q_2^{(2)}, q_3^{(2)}\right)$ из выражения (1-56):

$$v^{\alpha} = 1 \Big/ (4\pi\nu_{\alpha}) \sum_{\beta=1}^{\beta=3} \frac{\mathbf{M}_{q_\beta}^{(2)}}{h_{q_\beta}^{(2)}} \frac{\partial \cdot}{\partial q_\beta^{(2)}} \left[\frac{h_{q_1^{(2)}}}{h_{q_2^{(2)}} h_{q_3^{(2)}}} \beta\left(q_{20}^{(2)}, q_{30}^{(2)}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{\gamma} B_{\gamma}\left(q_{20}^{(2)}, q_{30}^{(2)}\right) \frac{B_{\gamma}\left(q_2^{(2)}, q_3^{(2)}\right)}{\Delta\left(y_{1\gamma}, y_{2\gamma}\right)} \begin{cases} y_{1\gamma}\left(q_1^{(2)}\right) y_{2\gamma}\left(q_{10}^{(2)}\right), & q_1^{(2)} \leqslant \xi_0; \\ y_{2\gamma}\left(q_1^{(2)}\right) y_{1\gamma}\left(q_{10}^{(2)}\right), & q_1^{(2)} > \xi_0, \end{cases} \right. \tag{1-61}$$

где $\beta\left(q_{20}^{(2)}, q_{30}^{(2)}\right)$, $B_{\gamma}\left(q_{20}^{(2)}, q_{30}^{(2)}\right)$, $B_{\gamma}\left(q_2^{(2)}, q_3^{(2)}\right)$ — весовые функции, выписанные для основных систем координат [1, 2]; $\Delta\left(y_{1\gamma}, y_{2\gamma}\right)$ — определитель Вронского; $y_{1\gamma}$, $y_{2\gamma}$ — частные решения.

Мультипольные поля могут быть представлены в виде [при использовании $v^{\text{м}}$ из выражения (1-61)]:

постоянного магнитного поля с напряженностью $\mathbf{H}\left(\mathbf{H}_{q_\beta}, \beta = 1, 2, 3\right)$, где

$$\mathbf{H}_{q_\beta} = -1/h_{q_\beta} \frac{\partial v^{\text{м}}}{\partial q_\beta}; \tag{1-62}$$

пульсирующего переменного магнитного поля с напряженностью $\mathbf{H}\left(\mathbf{H}_{q_\beta}, \beta = 1, 2, 3\right)$, где

$$\mathbf{H}_{q_\beta} = -1/h_{q_\beta} \frac{\partial v^{\text{м}}}{\partial q_\beta} \exp(-i\omega t); \tag{1-63}$$

вращающегося магнитного поля с напряженностью $\mathbf{H}\left(\mathbf{H}_{q_\beta}, \beta = 1, 2, 3\right)$: постоянного

$$\mathbf{H}_{q_\beta} = -1/h_{q_\beta} \frac{\partial v^{\text{м}}}{\partial q_\beta} \exp(-i\alpha\xi); \tag{1-64}$$

переменного

$$\mathbf{H}_{q_\beta} = -1/h_{q_\beta} \frac{\partial v^{\text{м}}}{\partial q_\beta} \exp[-i(\alpha\xi + \omega t)]. \tag{1-65}$$

Неоднородные поля вида (1-54) в дальнейшем не рассматриваются из-за громоздкости выражений. В справочнике рассматриваются для удобства два вида полей: однородные и неоднородные.

К однородным полям относятся постоянные и пульсирующие переменные и дипольные поля. Элементарный диполь считается находящимся в начале координат или на больших расстояниях r_2 от экранирующей оболочки с радиусом ξ_2 ($r_2 \gg \xi_2$). Если в качестве источника поля выступает физический диполь (например, петля с током), предполагается, что радиус петли $r_{\text{п}}$ много меньше радиуса оболочки ξ_2 (практически $r_{\text{п}} < 0{,}2\xi_2$).

К неоднородным полям относятся источники мультипольного поля, в том числе и эксцентрические диполи, расположенные внутри и вне оболочек, с постоянным или пульсирующим переменным моментом.

Однородные и неоднородные вращающиеся поля не рассматриваются, так как они могут быть представлены в виде двух ортогональных пульсирующих полей, имеющих угол фазового сдвига относительно друг друга $\pi/2$:

для однородных постоянных полей

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^{(0)}(\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y); \tag{1-66}$$

для переменных —

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^{(0)}(\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y)\exp(-i\omega t), \tag{1-67}$$

где $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ — единичные орты в системе прямоугольных координат;

для неоднородных постоянных полей

$$\mathbf{H} = (\mathbf{e}_{q_1}\mathbf{H}_{q_1} + \mathbf{e}_{q_2}\mathbf{H}_{q_2} + \mathbf{e}_{q_3}\mathbf{H}_{q_3})(\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y), \tag{1-68}$$

для переменных —

$$\mathbf{H} = (\mathbf{e}_{q_1}\mathbf{H}_{q_1} + \mathbf{e}_{q_2}\mathbf{H}_{q_2} + \mathbf{e}_{q_3}\mathbf{H}_{q_3})(\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y)\exp(-i\omega t). \tag{1-69}$$

1-5. ЭКРАНИРУЮЩИЕ ФУНКЦИИ

Электромагнитный экран характеризуется двумя взаимосвязанными функциями: экранирования и обратного действия, которые могут быть определены одна из другой. При проектировании экрана эти функции необходимо рассматривать совместно. Только совместное рассмотрение обеих функций может дать представление об энергетических процессах в исследуемом экране и позволит выбрать оптимальную конструкцию.

Пусть экран S разделяет пространство на две области: D_0 — область с одной стороны экрана; D_2 — область с другой стороны экрана (D_1 — область в материале экрана). Будем считать, что в области D_0 размещены источники, которые при отсутствии экрана создают поле напряженностью $\mathbf{E}^{(0)}$, $\mathbf{H}^{(0)}$. Наличие экрана создает в области D_0 вторичное поле напряженностью $\mathbf{E}^{(1)}$, $\mathbf{H}^{(1)}$ и в области D_2 — поле напряженностью $\mathbf{E}^{(2)}$, $\mathbf{H}^{(2)}$.

Функции экранирования определяются в области D_2 по формулам

$$K^{s\alpha}_{q_\beta} = \left|\mathbf{F}^{(2)\,\alpha}_{q_\beta}\right| / \left|\mathbf{F}^{(0)\,\alpha}_{q_\beta}\right|; \quad \mathbf{F}^{j\alpha}_{q_\beta} = \left[\mathbf{H}^{j}_{q_\beta};\ \mathbf{E}^{j}_{q_\beta}\right], \quad j = 0,\ 2, \tag{1-70}$$

где $\mathbf{H}^{j}_{q_\beta}$ и $\mathbf{E}^{j}_{q_\beta}$ — составляющие напряженности поля в системе координат $q_\beta(\beta = 1, 2, 3)$; индекс «s» определяет вид оболочки.

Функции обратного действия определяются в области D_0 по формулам

$$W^{s\alpha}_{q_\beta} = \left|\mathbf{F}^{(1)\,\alpha}_{q_\beta}\right| / \left|\mathbf{F}^{(0)\,\alpha}_{q_\beta}\right|; \quad \mathbf{F}^{(1)\,\alpha}_{q_\beta} = \left[\mathbf{H}^{(1)}_{q_\beta};\ \mathbf{E}^{(1)}_{q_\beta}\right]. \tag{1-71}$$

Если экранирующая оболочка S является замкнутой, а источник помехонесущего поля располагается вне оболочки, то функция обратного действия употребляется с индексом «a» — $W^{s\alpha}_{q_\beta\,(a)}$, если источник поля находится в полости оболочки, — с индексом «i». При расчете многослойных экранов происходит многократное отражение поля в пространстве между оболочками. Тогда в обозначении функции обратного действия используется индекс, указывающий на номер слоя со стороны источника поля, например $W^{s\alpha\,(1)}_{q_\beta\,(a)}$. Это означает, что источник помехонесущего поля находится вне оболочки, а определяется функция обратного действия первого слоя.

Иногда с точностью, достаточной для инженерных приложений, в качестве экранирующих функций используются отношения скалярных потенциалов $w^j = [v^j;\ u^j]$;

$$K^{sw} \approx \left|w^{(2)}\right| / \left|w^{(0)}\right|, \quad w = [u;\ v]; \tag{1-72}$$

$$W^{sw}_{\beta} \approx \left|w^{(1)}\right| / \left|w^{(0)}\right|, \quad \beta = [i;\ a]. \tag{1-73}$$

При экранировании однородных полей оболочками простых геометрических форм поле за экраном не искажается, а поэтому экранирующие функции можно получить в виде коэффициентов, не зависящих от взаимного расположения источника поля, оболочки и точки, в которой определяется функция экранирования. В качестве таких оболочек можно назвать плоские, круговые цилиндрические, сферические, эллипсоиды вращения при направлении поля вдоль оси вращения.

При экранировании неоднородного поля, структура которого зависит от координат пространства, экранирующие функции (1-70) — (1-73) будут переменными и зависеть от места расположения источника поля относительно экранирующей оболочки и его ориентации. В таких случаях экранирующие функции в виде (1-70) — (1-73) могут быть использованы для оценки экранирующих свойств оболочки S в отдельных характерных точках или областях.

На практике при экранировании неоднородных полей удобнее учитывать влияние экрана на структуру электромагнитного поля с помощью экранирующих функций по пространственным гармоникам. Для описания этих функций разложим потенциал w^j (или любую другую составляющую поля) по пространственным гармоникам в криволинейных ортогональных координатах (q_1, q_2, q_3), согласовывая систему координат с формой оболочки:

$$\begin{aligned} w^{(1)} &= \sum_n \sum_m y_{nm}^{(0)} Y_{nm}(q_2, q_3) F_{nm}(q_1) \text{ — в области } D_1; \\ w^{(2)} &= \sum_n \sum_m x_{nm}^{(2)} Y_{nm}(q_2, q_3) P_{nm}(q_1) \text{ — в области } D_2; \\ w^{(0)} &= \sum_n \sum_m A_{nm} Y_{nm}(q_2, q_3) P_{nm}(q_1) \text{ — в области } D_1, \end{aligned} \tag{1-74}$$

где A_{nm} — постоянные интегрирования, зависящие от значения напряженности поля источника; $y_{nm}^{(0)}$, $x_{nm}^{(2)}$ — неизвестные постоянные интегрирования; $F_{nm}(q_1)$ — координатные функции первого рода, регулярные во внутренней области; $P_{nm}(q_1)$ — координатные функции второго рода, удовлетворяющие условию в бесконечности для области D_2; n, m — параметры (для непрерывных n, m знаки сумм заменяются на интегралы).

На основании представления (1-74) экранирующие функции по пространственным гармоникам определяются по формулам

$$K_{nm}^{sa} = x_{nm}^{(2)}/A_{nm}; \quad W_{nm\,(\beta)}^{sa} = \left[y_{nm}^{(0)}/A_{nm}\right]\zeta_\beta, \tag{1-75}$$

где индекс «s» определяет вид оболочки; $\beta = a$; i; $\zeta_a = P_{nm}(\xi)/F_{nm}(\xi)$; $\zeta_i = F_{nm}(\xi)/P_{nm}(\xi)$.

Для универсализации экранирующих функций может быть использована фиксированная система координат, в частности сферическая, вне зависимости от формы оболочки. Использование сферических координат в представлении (1-75) для любых замкнутых экранов оправдано, так как это позволяет производить сопоставление экранирующих свойств оболочек с различной геометрией.

Приведенные выше функции могут применяться для описания и многослойных оболочек. В этом случае вводятся экранирующие функции, характеризующие долю влияния каждой оболочки:

$$K_{nm}^{sa\nu},\ W_{nm\beta}^{sa\nu}, \quad \beta = a;\ i \text{ — все } \nu\text{-оболочки};$$

$$K_{nm}^{saj},\ W_{nm\,(\beta)}^{saj} \text{ — только } j\text{-я оболочка}.$$

Соответствующим образом могут быть введены также функции экранирования для областей, ограниченных двумя соседними оболочками.

В инженерной практике иногда вместо функций экранирования K^{sa}, изменяющихся в пределах [0; 1], используют эффективность экранирования $Э^{sa}$ $(\infty > Э^{sa} > 1)$, — см., например, [50]:

$$Э^{sa} = 1/|K^{sa}|.$$

Величина $|K^{sa}|$ берется по модулю, так как в общем случае она является комплексной величиной.

Реже эффективность экранирования неоднородных полей рассчитывают, исходя из отношения энергий:

$$Э^{s\,(1)} = W_0/W_{эк}, \tag{1-76}$$

где W_0 и $W_{эк} = W_\tau$ — средняя за период электромагнитная энергия в объеме при отсутствии и наличии экрана:

$$W_\tau = \frac{1}{2}\int\limits_V \left[\varepsilon\,|\,\mathbf{E}_\tau\,|^2 + \mu\,|\,\mathbf{H}_\tau\,|^2\right] dv. \tag{1-77}$$

Такой подход правомочен при нахождении интегральной эффективности экранирования, что может оказаться полезным при аттестации экранирующих систем. Однако при этом теряется возможность раздельного рассмотрения эффективности экранирования напряженности электрического и магнитного поля, а экран, как известно, ослабляет их по-разному.

Наряду с эффективностью экранирования $Э^{s(1)}$ в опубликованной литературе используется экранное затухание:

$$S^{s\,(1)} = \ln Э^{s\,(1)}; \quad S^{s\,(1)} = 20\lg Э^{s\,(1)}. \tag{1-78}$$

В первом из выражений (1-78) результат получают в неперах, во втором — в децибелах.

При расчете экранного затухания $S^{s(1)}$ методом теории длинной линии выражение (1-78) может использоваться в виде [50, 51]

$$S^{s\,(1)} = A + R + B, \tag{1-79}$$

где A — потери энергии в материале экрана; B — потери энергии в окружающей среде; R — потери энергии на отражение.

Для расчетов используем эффективность экранирования лишь по составляющим магнитной напряженности:

для однородных полей

$$Э^{sj} = (K^{sj})^{-1}; \tag{1-80}$$

для неоднородных полей

$$Э^{sj}_{nm} = (K^{sj}_{nm})^{-1}. \tag{1-81}$$

Экранирующие функции по гармоникам K^{sa}_{nm} и $W^{sa}_{nm\,(\beta)}$ [см. выражения (1-75)] имеют точный смысл, указывают на экранирование отдельных гармоник и могут служить для сравнения экранирующих свойств разных оболочек. Однако они неудобны при сопоставлении результатов расчета с экспериментом. Для устранения отмеченного недостатка вводятся усредненные функции K^{sa} и W^{sa}_β. Они образуются следующим образом. Считаем, что двойные ряды, входящие в потенциалы $w^{(2)}$, $w^{(1)}$, $w^{(0)}$ выражений (1-74), представляют собой ряды (как правило, сходящиеся) с монотонно убывающими членами. Принимая во внимание равенство Парсеваля [14], выражающее квадрат нормы элемента в векторном пространстве со скалярным произведением через квадраты модулей коэффициентов Фурье этого элемента по некоторой ортогональной системе элементов,

$$\|C\| = \sum_{n,\,m}^{\infty} |a_{nm}|^2, \tag{1-82}$$

а также действующее значение функции, изменяющейся во времени [23],

$$C^* = \left[\frac{1}{d}\int_0^d \|C\|\, dt\right]^{0,5}, \tag{1-83}$$

можно написать приближенные выражения для $K^{s\alpha}$, $W_\beta^{s\alpha}$

$$\Phi^{s\alpha} = \left(\frac{1}{N}\sum_{n,\,m} |\Phi_{nm}^{s\alpha}|^2\right)^{0,5}, \tag{1-84}$$

где N — число членов, удерживаемых в рядах.

Выражение (1-84) может быть использовано для расчета усредненных экранирующих функций сферической вытянутой и сжатой сфероидальных оболочек:

для круговой цилиндрической оболочки

$$\Phi^{ц\alpha} = \left(\frac{1}{N}\sum_n \frac{1}{2d}\int_{-d}^{+d} |\Phi_n^{ц\alpha}(\lambda)|^2\, d\lambda\right)^{0,5}; \tag{1-85}$$

для плоской оболочки

$$\Phi^{п\alpha} = \left[\frac{1}{4bd}\int_{-b}^{+b}\int_{-d}^{+d} |\Phi_{\eta\beta}^{п\alpha}|^2\, d\eta\, d\beta\right]^{0,5}. \tag{1-86}$$

Усредненная эффективность экранирования определяется так же, как в выражении (1-80).

Если считать, что характеристики электромагнитного экрана изменяются линейно, то для него справедлив принцип взаимности перемещений, т. е. эффективность экранирующей оболочки сохраняется одной и той же независимо от того, расположен внутри него источник поля или защищаемая область пространства.

Обычно $|Э^{s\,м}| \ll |Э^{s\,э}|$ при реальных соотношениях габаритных размеров оболочек и длин волн помехонесущего электромагнитного поля. Это означает, что ослабление составляющих напряженности электрического поля при прохождении через экран превышает ослабление составляющих напряженности магнитного поля, поэтому, осуществив необходимое экранирование магнитных составляющих, обеспечиваем экранирование и электрических.

ГЛАВА ВТОРАЯ

ОБОЛОЧКИ ПРОСТЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФОРМ В ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

2-1. ОБЩИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА

Оболочки толстостенные. Под толстостенными оболочками, находящимися в постоянном помехонесущем магнитном поле, понимают такие, толщина Δ_j которых связана с диаметром $d_j = 2\xi_j$ оболочки неравенством $\Delta_j > 0{,}1\xi_j$.

Считаем, что эранирующие оболочки ограничены полными координатными поверхностями. Каждая система оболочек состоит из однотипных оболочек: плоских, круглых, цилиндрических, сферических, вытянутых и сжатых сфероидальных и т. д.

Постановка задачи. Пусть в однородном изотропном пространстве находятся ν концентрических (в случае плоских — параллельных) толстостенных оболочек, ограниченных координатными поверхностями $S_j(q_1 = \xi_j)$, $j \in [1; 2\nu]$ с центром в точке O (рис. 2-1). Назовем областью D_0 часть пространства, внутреннюю ко всем оболочкам и содержащую начало координат O, областью D_j — пространство между поверхностями S_j и S_{j+1}, областью $D_{2\nu}$ — пространство, внешнее ко всем оболочкам. Каждая область D_j имеет магнитную проницаемость μ_j $(j \in [0; 2\nu])$. Источник магнитного поля — магнитный диполь $D[\mathbf{M}_1, \mathbf{r}_1]$, расположенный в точке O_1 области D_0 и произвольно ориентированный в пространстве. Задача состоит в определении напряженности магнитных полей, возбуждаемых источником поля произвольного вида в каждой из областей D_j, а также экранирующих функций оболочек.

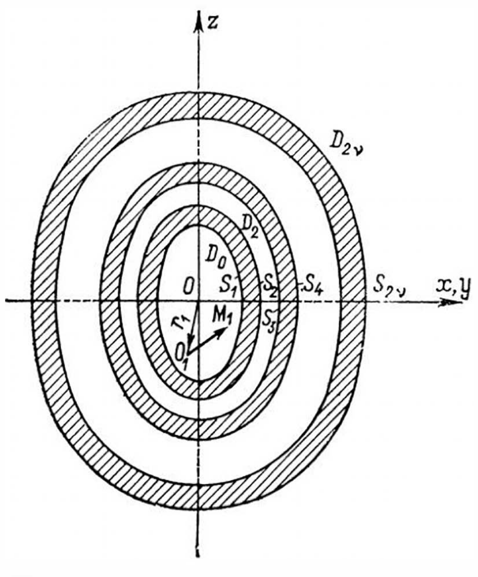


Рис. 2-1. Система толстостенных концентрических оболочек, ограниченных координатными поверхностями

Строгое решение задачи сводится к нахождению скалярного потенциала v_j в области D_j из уравнения Лапласа (1-19).

К уравнению (1-16) добавляются граничные условия, накладываемые на v_j [см. (1-20)—(1-21)]:

$$\mu_j \frac{\partial v_j}{\partial q_1}\bigg|_{q_1=\xi_{j+1}} = \mu_{j+1} \frac{\partial v_{j+1}}{\partial q_1}\bigg|_{q_1=\xi_{j+1}}; \quad v_j\big|_{q_1=\xi_{j+1}} = v_{j+1}\big|_{q_1=\xi_{j+1}}, \tag{2-1}$$

условие регулярности решения в бесконечности

$$v_{2\nu}(M) \to 0, \quad M \to \infty. \tag{2-2}$$

Метод решения. Граничные поверхности S_j совпадают с координатными поверхностями криволинейной ортогональной системы координат (q_1, q_2, q_3). Решения уравнения (1-16) в области D_j находятся в виде суперпозиции частных решений с разделенными переменными в системе (q_1, q_2, q_3):

$$v_j = \sum_n \sum_m \left[x_{nm}^{(j)} P_{nm}(q_1) + y_{nm}^{(j)} F_{nm}(q_1)\right] Y_{nm}(q_2, q_3) \text{ — в области } D_j, \tag{2-3}$$

где $x_{nm}^{(0)} = a_{nm}$ заданы и определяются полем диполя из соотношения (1-56), помещенного в область D_0; $y_{nm}^{(2\nu)} = 0$; здесь n, m — параметры, пробегающие некоторые дискретные множества числовых значений (для непрерывных параметров знаки сумм заменяются на интегралы).

Используя выражение (2-3), граничные условия (2-1)—(2-2), решение задачи сводим к решению алгебраических уравнений:

$$\begin{gathered} x_{nm}^{(j)} P_{nm}(\xi_{j+1}) + y_{nm}^{(j)} F_{nm}(\xi_{j+1}) = x_{nm}^{(j+1)} P_{nm}(\xi_{j+1}) + y_{nm}^{(j+1)} F_{nm}(\xi_{j+1}); \\ x_{nm}^{(j)} P'_{nm}(\xi_{j+1}) + y_{nm}^{(j)} F'_{nm}(\xi_{j+1}) = \nu_{j+1,j}\left[x_{nm}^{(j+1)} P'_{nm}(\xi_{j+1}) + y_{nm}^{(j+1)} \times \right. \\ \left. \times F'_{nm}(\xi_{j+1})\right], \quad \nu_{j+1,j} = \mu_{j+1}/\mu_j, \quad j \in [0;\ 2\nu - 1]. \end{gathered} \tag{2-4}$$

Разрешая уравнения (2-4), определим

$$\begin{aligned} x_{nm}^{(j+1)} &= A_{j+1}^{11}(n, m)\, x_{nm}^{(j)} + A_{j+1}^{12}(n, m)\, y_{nm}^{(j)}; \\ y_{nm}^{(j+1)} &= A_{j+1}^{21}(n, m)\, x_{nm}^{(j)} + A_{j+1}^{22}(n, m)\, y_{nm}^{(j)} \end{aligned} \tag{2-5}$$

или в матричной форме

$$\mathbf{X}_{nm}^{(j+1)} = A_{j+1}(n, m)\, \mathbf{X}^{(j)}, \quad j \in [0;\ 2\nu - 1], \tag{2-6}$$

где

$$\mathbf{X}_{nm}^{(j)} = \begin{pmatrix} x_{nm}^{(j)} \\ y_{nm}^{(j)} \end{pmatrix}; \quad A_j(n, m) = \begin{pmatrix} A_j^{11}(n, m), & A_j^{12}(n, m) \\ A_j^{21}(n, m), & A_j^{22}(n, m) \end{pmatrix};$$

$$A_j^{11}(n, m) = [\nu_{j,j-1}\Delta_j(n, m)]^{-1}\left[\nu_{j,j-1} F'_{nm}(\xi_j) P_{nm}(\xi_j) - \right.$$
$$\left. - F_{nm}(\xi_j) P'_{nm}(\xi_j)\right];$$

$$A_j^{12}(n, m) = \{(\nu_{j,j-1} - 1)/[\nu_{j,j-1}\Delta_j(n, m)]\} F_{nm}(\xi_j) F'_{nm}(\xi_j);$$

$$A_j^{21}(n, m) = \{(1 - \nu_{j,j-1})/[\nu_{j,j-1}\Delta_j(n, m)]\} P_{nm}(\xi_j) P'_{nm}(\xi);$$

$$A_j^{22}(n, m) = [\nu_{j, j-1}\Delta_j(n, m)]^{-1}[P_{nm}(\xi_j)F'_{nm}(\xi_j) - \\ - \nu_{j, j-1}P'_{nm}(\xi_j)F_{nm}(\xi_j)];$$

$$\Delta_j(n, m) = P_{nm}(\xi_j)F'_{nm}(\xi_j) - \\ - P'_{nm}(\xi_j)F_{nm}(\xi_j) - \text{определитель Вронского.}$$

Последовательно применяя выражение (2-6), получим

$$\mathbf{X}_{nm}^{(2\nu)} = B_{2\nu}(n, m)\mathbf{X}_{nm}^{(0)}, \tag{2-7}$$

где

$$B_{2\nu}(n, m) = \prod_{j=1}^{2\nu} A_j(n, m); \quad B_{2\nu}(n, m) = \begin{pmatrix} B_{2\nu}^{11}, & B_{2\nu}^{12} \\ B_{2\nu}^{21}, & B_{2\nu}^{22} \end{pmatrix}.$$

Распишем (2-7) покомпонентно, тогда

$$\begin{aligned} x_{nm}^{(2\nu)} &= B_{2\nu}^{11}x_{nm}^{(0)} + B_{2\nu}^{12}y_{nm}^{(0)}; \\ y_{nm}^{(2\nu)} &= B_{2\nu}^{21}x_{nm}^{(0)} + B_{2\nu}^{22}y_{nm}^{(0)}. \end{aligned} \tag{2-8}$$

Учитывая, что $y_{nm}^{(2\nu)} = 0$; $x_{nm}^{(0)} = a_{nm}$, определим окончательно

$$y_{nm}^{(0)} = -[B_{2\nu}^{21}(n, m)/B_{2\nu}^{22}(n, m)]\, a_{nm};$$

$$x_{nm}^{(2\nu)} = [\nu_{2\nu, 0}B_{2\nu}^{22}(n, m)]^{-1} a_{nm},$$

откуда формулы для расчета экранирующих функций записываются в виде:

$$\begin{aligned} Э_{nm}^{s\nu} &= \nu_{2\nu, 0}B_{2\nu}^{22}(n, m); \\ W_{nm\,(a)}^{s\nu} &= -[B_{2\nu}^{21}(n, m)/B_{2\nu}^{22}(n, m)]\,[P_{nm}(q_1)/F_{nm}(q_1)]. \end{aligned} \tag{2-9}$$

Результаты решения. После некоторых преобразований из (2-9) получим более простую запись:

$$Э_{nm}^{s\nu} = \prod_{j=1}^{j=2\nu} \Delta_j^{-1}(n, m)\,[P_j b_2^{(j)} - N_j \nu_{j+1, j} b_1^{(j)}]; \tag{2-9а}$$

$$W_{nm\,(a)}^{s\nu} = (b_1^{(1)}/a_1^{(1)})\,\zeta_{2\nu-1}, \tag{2-9б}$$

где

$$\zeta_{2\nu-1} = -\frac{a_1^{(2\nu-1)}\nu_{2\nu, 2\nu-1}N_{2\nu-1} - a_2^{(2\nu-1)}P_{2\nu-1}}{b_1^{(2\nu-1)}\nu_{2\nu, 2\nu-1}N_{2\nu-1} - b_2^{(2\nu-1)}P_{2\nu-1}};$$

$$\zeta_{2\nu} = -\frac{\nu_{2\nu, 2\nu-1}a_1^{(2\nu-1)}a_2^{(2\nu-1)} - a_1^{(2\nu-1)}a_2^{(2\nu-1)}}{\nu_{2\nu, 2\nu-1}a_2^{(2\nu-1)}b_1^{(2\nu-1)} - a_1^{(2\nu-1)}b_2^{(2\nu-1)}};$$

$$\zeta_{2\nu+1} = 0; \quad P_{2\nu-1} = a_1^{(2\nu-1)} + a_{nm}^{s\,(2\nu)}b_1^{(2\nu-1)}; \tag{2-9в}$$

$$N_{2\nu-1} = a_2^{(2\nu-1)} + a_{nm}^{s\,(2\nu)}b_2^{(2\nu-1)};$$

$$a_{nm}^{s\,(2\nu)} = -a_1^{(2\nu)}a_2^{(2\nu)}(1 - \nu_{2\nu+1, \nu})/[a_1^{(2\nu)}b_2^{(2\nu)} - \nu_{2\nu+1, \nu}a_2^{(2\nu)}b_1^{(2\nu)}];$$

$\Delta_j(n, m)$ — определитель Вронского; $a_1^{(j)} = F_{nm}(\xi_j)$; $a_2^{(j)} = F'_{nm}(\xi_j)$;

$b_1^{(j)} = P_{nm}(\xi_j)$; $b_2^{(j)} = P'_{nm}(\xi_j)$; $\nu_{j+1,\,j} = \mu_{j+1}/\mu_j$; штрихи у функций обозначают производные по аргументу ξ_j.

Из общих формул (2-9а)—(2-9в) можно получить формулы для расчета экранирующих функций заданного числа оболочек:

для однослойной оболочки ($\nu = 1$)

$$
\begin{aligned}
\text{Э}_{nm}^{s\,(1)} = {} & \left[(\nu_{1,0} - 1)^2 b_1^{(1)} b_2^{(1)} a_1^{(2)} a_2^{(2)} - \left(\nu_{1,0} b_1^{(1)} a_2^{(1)} - b_2^{(1)} a_1^{(1)}\right)\left(\nu_{1,0} \times \right.\right. \\
& \left.\left. \times a_1^{(2)} b_2^{(2)} - b_1^{(2)} a_2^{(2)}\right)\right] \left[\nu_{1,0} \Delta\left(a_1^{(1)};\ b_1^{(1)}\right) \Delta\left(a_1^{(2)};\ b_1^{(2)}\right)\right]^{-1}; \qquad \text{(2-10а)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W_{nm\,(a)}^{s\,(1)} = {} & \left\{(\nu_{1,0} - 1)\left[\nu_{1,0} a_1^{(1)} a_1^{(2)} \left(a_2^{(1)} b_2^{(2)} - a_1^{(2)} b_2^{(1)}\right) + a_2^{(1)} a_2^{(2)} \times \right.\right. \\
& \left.\left. \times \left(a_1^{(2)} b_1^{(1)} - a_1^{(1)} b_1^{(2)}\right)\right] \left(b_1^{(1)}/a_1^{(1)}\right)\right\} \left[(\nu_{1,0} - 1)^2 b_1^{(1)} b_2^{(1)} a_1^{(2)} a_2^{(2)} - \right. \\
& \left. - \left(\nu_{1,0} b_1^{(1)} a_2^{(1)} - b_2^{(1)} a_1^{(1)}\right)\left(\nu_{1,0} a_1^{(2)} b_2^{(2)} - b_1^{(2)} a_2^{(2)}\right)\right]^{-1}; \qquad \text{(2-10б)}
\end{aligned}
$$

для двухслойной оболочки ($\nu = 2$)

$$
\begin{aligned}
\text{Э}_{nm}^{s\,(2)} = {} & \left[\nu_{1,0} \nu_{2,0} \Delta\left(a_1^{(1)};\ b_1^{(1)}\right) \Delta\left(a_1^{(2)};\ b_1^{(2)}\right) \Delta\left(a_1^{(3)};\ b_1^{(3)}\right) \Delta\left(a_1^{(4)};\ b_1^{(4)}\right)\right]^{-1} \times \\
& \times \left\{\left[\left(b_1^{(4)} a_2^{(4)} - \nu_{2,0} a_1^{(4)} b_2^{(4)}\right)\left(b_2^{(3)} a_1^{(3)} - \nu_{2,0} b_1^{(3)} a_2^{(3)}\right) - (\nu_{2,0} - 1)^2 a_1^{(4)} \times \right.\right. \\
& \times a_2^{(4)} b_1^{(3)} b_2^{(3)}\Big] \Big[\left(b_2^{(1)} a_1^{(1)} - \nu_{1,0} b_1^{(1)} a_2^{(1)}\right)\left(b_1^{(2)} a_2^{(2)} - \nu_{1,0} a_1^{(2)} b_2^{(2)}\right) - \\
& - (\nu_{1,0} - 1)^2 a_1^{(2)} a_2^{(2)} b_1^{(1)} b_2^{(1)}\Big] - (\nu_{1,0} - 1)\Big[\left(b_1^{(4)} a_2^{(4)} - \nu_{2,0} a_1^{(4)} b_2^{(4)}\right) \times \\
& \times \left(a_2^{(3)} a_1^{(3)} - \nu_{2,0} a_1^{(3)} a_2^{(3)}\right) + (\nu_{2,0} - 1) a_1^{(4)} a_2^{(4)} \left(b_1^{(3)} a_2^{(3)} - \nu_{2,0} a_1^{(3)} b_2^{(3)}\right)\Big] \times \\
& \left.\times \left[b_1^{(1)} b_2^{(1)} \left(a_1^{(2)} b_2^{(2)} - \nu_{1,0} a_2^{(2)} b_1^{(2)}\right) - b_1^{(2)} b_2^{(2)} \left(b_2^{(1)} a_1^{(1)} - \nu_{1,0} a_2^{(1)} b_1^{(1)}\right)\right]\right\}; \qquad \text{(2-11а)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W_{nm\,(a)}^{s\,(2)} = {} & - \Big\{\left(b_1^{(1)}/a_1^{(1)}\right)\Big\{(\nu_{2,0} - 1)\Big[a_1^{(4)} a_2^{(4)} \left(a_2^{(3)} b_1^{(3)} - \nu_{2,0} a_1^{(3)} b_2^{(3)}\right) - \\
& - a_1^{(3)} a_2^{(3)} \left(a_2^{(4)} b_1^{(4)} - \nu_{2,0} a_1^{(4)} b_2^{(4)}\right)\Big] \Big[\left(b_1^{(1)} a_2^{(1)} - \nu_{1,0} a_1^{(1)} b_2^{(1)}\right)\Big(a_1^{(2)} b_2^{(2)} + \\
& + \nu_{1,0} a_2^{(2)} b_1^{(2)}\Big) - (\nu_{1,0} - 1)^2 a_1^{(1)} a_2^{(1)} b_1^{(2)} b_2^{(2)}\Big] + (\nu_{1,0} - 1)\Big[b_1^{(4)} a_2^{(4)} - \\
& - \nu_{2,0} a_1^{(4)} b_2^{(4)}\Big)\left(a_1^{(3)} b_2^{(3)} - \nu_{2,0} a_2^{(3)} b_1^{(3)}\right) - (\nu_{2,0} - 1)^2 a_1^{(4)} a_2^{(4)} b_1^{(3)} b_2^{(3)}\Big] \times \\
& \times \Big[a_1^{(2)} a_2^{(2)} \left(a_2^{(1)} b_1^{(1)} - \nu_{1,0} a_1^{(1)} b_2^{(1)}\right) - a_1^{(1)} a_2^{(1)} \left(a_2^{(2)} b_1^{(2)} - \nu_{1,0} a_1^{(2)} b_2^{(2)}\right)\Big]\Big\}\Big\} \times \\
& \times \Big\{\Big[\left(b_1^{(4)} a_2^{(4)} - \nu_{2,0} a_1^{(4)} b_2^{(4)}\right)\left(b_2^{(3)} a_1^{(3)} - \nu_{2,0} b_1^{(3)} a_2^{(3)}\right) - \\
& - (\nu_{2,0} - 1)^2 a_1^{(4)} a_2^{(4)} b_1^{(3)} b_2^{(3)}\Big] \Big[\left(b_2^{(1)} a_1^{(1)} - b_1^{(1)} a_2^{(1)} \nu_{2,0}\right) \times \\
& \times \left(b_1^{(2)} a_2^{(2)} - \nu_{1,0} a_1^{(2)} b_2^{(2)}\right) - a_1^{(2)} a_2^{(2)} b_1^{(1)} b_2^{(1)} (\nu_{1,0} - 1)^2\Big] - \\
& - \Big[\left(b_1^{(4)} a_2^{(4)} - \nu_{2,0} a_1^{(4)} b_2^{(4)}\right)\left(a_2^{(3)} a_1^{(3)} - \nu_{2,0} a_1^{(3)} a_2^{(3)}\right) + (\nu_{2,0} - 1) a_1^{(4)} a_2^{(4)} \times \\
& \times \left(b_1^{(3)} a_2^{(3)} - \nu_{2,0} a_1^{(3)} b_2^{(3)}\right)\Big] (\nu_{1,0} - 1)\Big[b_1^{(1)} b_2^{(1)} \left(a_1^{(2)} b_2^{(2)} + \nu_{1,0} a_2^{(2)} b_1^{(2)}\right) - \\
& - b_1^{(2)} b_2^{(2)} \left(b_2^{(1)} a_1^{(1)} - \nu_{1,0} a_2^{(1)} b_1^{(1)}\right)\Big]\Big\}^{-1}. \qquad \text{(2-11б)}
\end{aligned}
$$

Аналогичным образом можно получить формулы для расчета любого числа слоев оболочек.

Оболочки тонкостенные. Во многих случаях на практике используются достаточно тонкие ферромагнитные оболочки, а поэтому при расчете векторные уравнения Максвелла содержат разности близких величин. Для тонких слоев и оболочек более естественным представляется способ решения задачи, при котором условие малости толщины слоя или оболочки учитывалось бы в самом процессе решения. Осуществляется это преобразование граничных условий так, чтобы исключить величины, характеризующие напряженность поля в самой оболочке. Устанавливается непосредственная связь между величинами, характеризующими напряженность поля по обе стороны оболочки [2, 7]. В качестве таких условий используются соотношения (1-38).

Под тонкостенными оболочками будем понимать такие, толщина Δ_j которых связана с диаметром $d_j = 2\xi_j$ оболочки неравенством $\Delta_j < 0{,}1 d_j$. Как и при исследовании толстостенных оболочек, тонкостенные оболочки ограничим полными координатными поверхностями.

Постановка задачи. Пусть в однородном изотропном пространстве находятся ν концентрических тонкостенных оболочек, совпадающих с координатными поверхностями $S_j(q_1 = \xi_j)$, $j \in [1;\ \nu]$, с центром в точке O (рис. 2-2). Назовем областью D_0 часть пространства, внутреннюю ко всем оболочкам и содержащую начало координат в точке O, область D_j — пространство между поверхностями S_j и S_{j+1}, областью D_ν — пространство, внешнее ко всем оболочкам. Все области D_j имеют магнитную проницаемость μ_0, а материал каждой оболочки S_j имеет магнитную проницаемость μ_j ($j \in [1;\ \nu]$). Источник магнитного поля — магнитный диполь $D[\mathbf{M}_1, \mathbf{r}_1]$, расположенный в точке O_1 области D_0 и произвольно ориентированный в пространстве. Задача состоит в определении скалярных потенциалов магнитных полей, возбуждаемых источником в областях D_j, а также экранирующих функций оболочек.

Строгое решение задачи сводится к нахожению скалярных потенциалов v_j в областях D_j из уравнения Лапласа (1-16). К уравнению (1-16) добавляются граничные условия, накладываемые на v_j [см. выражения (1-38)]:

$$\left.\frac{\partial (v_{j+1} - v_j)}{\partial q_1}\right|_{q_1 = \xi_{j+1}} = -F_1[p_{j+1},\ v_{j+1} + v_j]\,|_{q_1 = \xi_{j+1}}; \qquad (2\text{-}12)$$

$$v_{j+1}\,|_{q_1 = \xi_{j+1}} = v_j\,|_{q_1 = \xi_{j+1}}, \quad j \in [0;\ \nu - 1],$$

где $p_j = \mu_j \Delta_j / (2\mu_0)$; Δ_j — толщина оболочки S_j; $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_\nu$; условие регулярности в бесконечности

$$u_\nu(M) \to 0, \quad M \to \infty. \qquad (2\text{-}13)$$

Метод решения. Граничные поверхности S_j совпадают с координатными поверхностями ортогональной криволинейной системы координат (q_1, q_2, q_3). Решения для области D_j находятся в виде суперпозиции частных решений уравнения Лапласа (1-16):

$$v_j = \sum_n \sum_m \left[x_{nm}^{(j)} P_{nm}(q_1) + y_{nm}^{(j)} F_{nm}(q_1) \right] Y_{nm}(q_2, q_3) - \quad (2\text{-}14)$$

$$\text{в области } D_j, \quad j \in [0; \nu],$$

где $x_{nm}^{(0)} = a_{nm}$ заданы и определяются полем диполя, помещенного в область D_0; $y_{nm}^{(\nu)} = 0$; n, m — параметры. Влияние граничного оператора F_1 на базисные функции выразится в виде [2]

$$F_1 [p_j; f(q_1) Y_{nm}(q_2, q_3)] \big|_{q_1 = \xi_j} = p_j G_{nm}^{s\,(j)} f(\xi_j) Y_{nm}(q_2, q^{\cdot}), \quad (2\text{-}15)$$

где $f(q_1) = F_{mn}(q_1)$; $P_{nm}(q_1)$; S — оболочка.

Используя (2-14), граничные условия (2-12)—(2-13) и соотношение (2-15), решение задачи сведем к решению системы

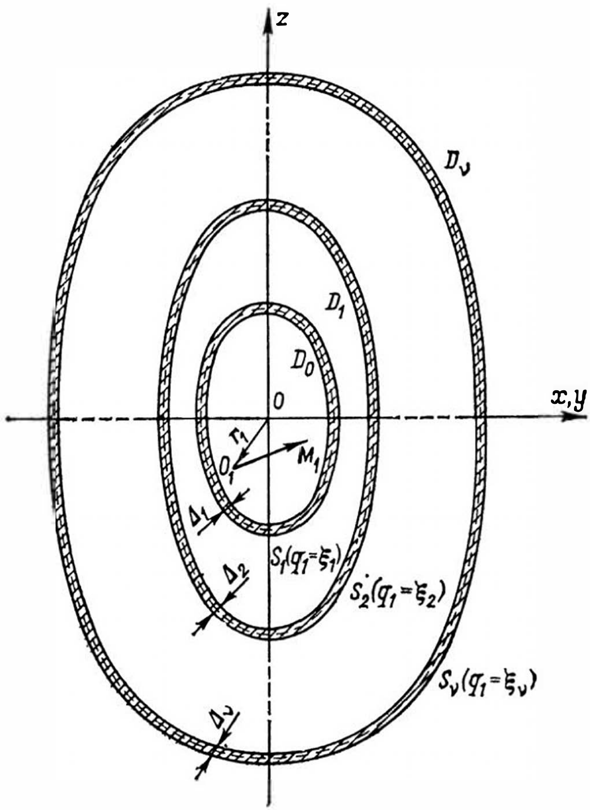


Рис. 2-2. Система тонкостенных концентрических оболочек, ограниченных координатными поверхностями

алгебраических уравнений:

$$x_{mn}^{(j+1)}b_1^{(j+1)} + y_{nm}^{(j+1)}a_1^{(j+1)} = x_{nm}^{(j)}b_1^{(j+1)} + y_{nm}^{(j)}a_1^{(j+1)}; \tag{2-16}$$

$$\left[b_2^{(j+1)} + H_{nm}^{(j+1)}b_1^{(j+1)}\right] x_{nm}^{(j+1)} + \left[a_2^{(j+1)} + H_{nm}^{(j+1)}a_1^{(j+1)}\right] y_{nm}^{(j+1)} =$$

$$= \left[b_2^{(j+1)} - H_{nm}^{(j+1)}b_1^{(j+1)}\right] x_{nm}^{(j)} + \left[a_2^{(j+1)} - H_{nm}^{(j+1)}a_1^{(j+1)}\right] y_{nm}^{(j)};$$

$$H_{nm}^{(j)} = p_j G_{nm}^{s\,(j)}; \quad a_1^{(j+1)} = F_{nm}(\xi_{j+1}); \quad a_2^{(j+1)} = F'_{nm}(\xi_{j+1});$$

$$b_1^{(j+1)} = P_{nm}(\xi_{j+1}); \quad b_2^{(j+1)} = P'_{nm}(\xi_{j+1}).$$

Разрешая систему уравнений (2-16), найдем

$$x_{nm}^{(j+1)} = A_{j+1}^{11}(n,\ m)\, x_{nm}^{(j)} + A_{j+1}^{12}(n,\ m)\, y_{nm}^{(j)};$$

$$y_{nm}^{(j+1)} = A_{j+1}^{21}(n,\ m)\, x_{nm}^{(j)} + A_{j+1}^{22}(n,\ m)\, y_{nm}^{(j)}, \quad j \in [0;\ \nu - 1]$$

или в матричной форме

$$\mathbf{X}_{nm}^{(j+1)} = A_{j+1}(n,\ m)\,\mathbf{X}_{nm}^{(j)}, \tag{2-17}$$

где

$$\begin{aligned} A_j^{11}(n,\ m) &= 1 + (2/\Delta_j)\, H_{nm}^{(j)} a_1^{(j)} b_1^{(j)};\\ A_j^{12}(n,\ m) &= (2/\Delta_j)\, H_{nm}^{(j)} a_1^{(j)\,2};\\ A_j^{21}(n,\ m) &= -(2/\Delta_j)\, H_{nm}^{(j)} b_1^{(j)\,2};\\ A_j^{22}(n,\ m) &= 1 - (2/\Delta_j)\, H_{nm}^{(j)} a_1^{(j)} b_1^{(j)}, \quad j \in [1;\ \nu]; \quad \Delta_j \equiv \Delta_j(n,\ m). \end{aligned} \tag{2-18}$$

Последовательно применяя (2-17), получим

$$\mathbf{X}_{nm}^{(\nu)} = B_\nu(n,\ m)\,\mathbf{X}_{nm}^{(0)}, \tag{2-19}$$

где

$$B_\nu(n,\ m) = \prod_{j=1}^{\nu} A_j(n,\ m); \quad B_\nu(n,\ m) = \begin{pmatrix} B_\nu^{11}; & B_\nu^{12} \\ B_\nu^{21}; & B_\nu^{22} \end{pmatrix}.$$

Представим последнюю систему уравнений покомпонентно, тогда

$$x_{nm}^{(\nu)} = B_\nu^{11} x_{nm}^{(0)} + B_\nu^{12} y_{nm}^{(0)};$$

$$y_{nm}^{(\nu)} = B_\nu^{21} x_{nm}^{(0)} + B_\nu^{22} y_{nm}^{(0)}.$$

Учитывая, что $y_{nm}^{(\nu)} = 0$, $x_{nm}^{(0)} = a_{nm}$, определим окончательно

$$y_{nm}^{(0)} = -\left[B_\nu^{21}(n,\ m)/B_\nu^{22}(n,\ m)\right] a_{nm};$$

$$x_{nm}^{(\nu)} = \left[B_\nu^{22}(n,\ m)\right]^{-1} a_{nm}.$$

Формулы для расчета экранирующих функций записываются в виде

$$Э_{nm}^{s\nu} = B_\nu^{22}(n,\ m); \tag{2-20а}$$

$$W_{nm\,(a)}^{s\nu} = \left[B_\nu^{21}(n,\ m)\, b_1^{(1)} / B_\nu^{22}(n,\ m)\, a_1^{(1)}\right]. \tag{2-20б}$$

Результаты решения. После некоторых преобразований соотношений (2-20) получим более простую запись:

$$Э_{nm}^{s\nu}=\prod_{j=1}^{j=\nu}\frac{l_{mn}^{(j)}+\zeta_{nm}^{(j+1)}d_{mn}^{(j)}}{\tilde{p}_j\,\Delta_j\,(n,\ m)};\qquad(2\text{-}21а)$$

$$W_{nm\,(a)}^{s\nu}=\left[a_1^{(1)}/b_1^{(1)}\right]^{-1}\zeta_1,\qquad(2\text{-}21б)$$

где $\zeta_1=-\left(L_{mn}^{(1)}+\zeta_2 l_{mn}^{(1)}\right)/\left(l_{mn}^{(2)}+\zeta_2 d_{mn}^{(2)}\right)$; $\zeta_\nu=-L_{mn}^{(\nu)}/l_{mn}^{(\nu)}$; $\zeta_{\nu+1}=0$; $\Delta_j\,(n,\ m)$ — определитель Вронского; $\tilde{p}_j\Delta_j\,(n,\ m)\equiv G_{nm}^{(j)}$;

$$\begin{aligned}&l_{mn}^{(j)}=2\tilde{p}_j a_1^{(j)}b_1^{(j)}+\Delta_j\,(n,\ m);\quad L_{mn}^{(j)}=2\tilde{p}_j a_1^{(j)\,2};\\&d_{mn}^{(j)}=2\tilde{p}_j b_1^{(j)2};\quad \tilde{p}_j=\chi\,dp_j;\quad p_j=\nu_{j,\,0}(\Delta_j/2);\end{aligned}\qquad(2\text{-}21в)$$

$\chi=\left(h_{q_1}/h_{q_2}^2\right)\big|_{q_1=\xi_j}$; d — постоянная разделения; h_{q_j} $(j=1,\ 2)$ — коэффициенты Ламе. Остальные обозначения такие же, как и в формулах (2-9в).

Из общих формул (2-21) можно получить формулы для расчета экранирующих функций любого числа оболочек:

для однослойной оболочки ($\nu=1$)

$$Э_{nm}^{s\,(1)}=\left[\Delta_1\,(n,\ m)+2\tilde{p}_1 a_1^{(1)}b_1^{(1)}\right]/\Delta_1\,(n,\ m);\qquad(2\text{-}22а)$$

$$W_{nm\,(a)}^{s\,(1)}=-\left[2\left(b_1^{(1)}/a_1^{(1)}\right)\tilde{p}_1 a_1^{(1)2}\right]/\left[\Delta_1\,(n,\ m)+2\tilde{p}_1 a_1^{(1)}b_1^{(1)}\right]\qquad(2\text{-}22б)$$

(эти формулы соответствуют приведенным в работе [1]);

для двухслойной оболочки ($\nu=2$)

$$Э_{nm}^{s\,(2)}=\left(l_{mn}^{(1)}l_{mn}^{(2)}-d_{mn}^{(1)}L_{mn}^{(2)}\right)/[\Delta_1\,(n,\ m)\,\Delta_2\,(n,\ m)];\qquad(2\text{-}23а)$$

$$W_{nm\,(a)}^{s\,(2)}=\left(b_1^{(1)}/a_1^{(1)}\right)\frac{L_{mn}^{(1)}l_{mn}^{(2)}-L_{mn}^{(2)}l_{mn}^{(1)}}{l_{mn}^{(1)}l_{mn}^{(2)}-L_{mn}^{(2)}d_{mn}^{(1)}};\qquad(2\text{-}23б)$$

для трехслойной оболочки ($\nu=3$)

$$\begin{aligned}Э_{nm}^{s\,(3)}=&\left[l_{mn}^{(1)}\left(l_{mn}^{(2)}l_{mn}^{(3)}-L_{mn}^{(3)}d_{mn}^{(2)}\right)-\right.\\&\left.-d_{mn}^{(2)}\left(L_{mn}^{(2)}l_{mn}^{(3)}-L_{mn}^{(3)}l_{mn}^{(2)}\right)\right]/[\Delta_1\,(n,\ m)\,\Delta_2\,(n,\ m)\,\Delta_3\,(n,\ m)];\end{aligned}\qquad(2\text{-}24а)$$

$$\begin{aligned}W_{nm\,(a)}^{s\,(3)}=&-\left\{\left(b_1^{(1)}/a_1^{(1)}\right)\left[L_{mn}^{(1)}\left(l_{mn}^{(2)}l_{mn}^{(3)}-L_{mn}^{(3)}d_{mn}^{(2)}\right)-\right.\right.\\&\left.\left.-l_{mn}^{(1)}\left(L_{mn}^{(2)}l_{mn}^{(3)}-L_{mn}^{(3)}l_{mn}^{(2)}\right)\right]\right\}/\left[l_{mn}^{(1)}\left(l_{mn}^{(2)}l_{mn}^{(3)}-L_{mn}^{(3)}d_{mn}^{(2)}\right)-\right.\\&\left.-d_{mn}^{(2)}\left(L_{mn}^{(2)}l_{mn}^{(3)}-L_{mn}^{(3)}l_{mn}^{(2)}\right)\right].\end{aligned}\qquad(2\text{-}24б)$$

Для бóльшего числа слоев оболочек формулы для расчета экранирующих функций становятся слишком громоздкими.

Анализ расчетных методов. Метод расчета многослойных экранирующих оболочек является классическим и использовался, в частности, для расчета конкретных видов оболочек в однородных магнитных полях [10]. Результаты расчета экранирующих функций, полученные таким методом, можно считать истинными, если магнитная проницаемость μ материала оболочек определена точно и считается неизменной.

Метод расчета многослойных тонкостенных экранирующих оболочек базируется на использовании эквивалентных граничных условий (2-14), выведенных для оболочек с $h_{q_1} = 1$ (сферических, круговых цилиндрических и плоских) [7] и усовершенствованных для h_{q_1}, отличных от единицы [18]. Они связывают составляющие напряженности магнитного поля на поверхности бесконечно тонких металлических оболочек, имеющих конечную поверхностную магнитную проницаемость $\mu_s = \mu\Delta$. При выводе условий использован закон изменения напряженности поля при изменении толщины, имеющий место для плоской электромагнитной волны в плоском слое. Такие условия представляют собой хорошее приближение к реальным, если $\mu_s = \mathrm{const}$, а толщина оболочки много меньше ее геометрических размеров. В формулы для расчета функций экранирования и обратного действия входят дроби вида $\left[(\xi_j + \Delta_j)\,\xi_j^{-1}\right]^{n+a}$, где ξ_j — радиус оболочки ($q_1 = \xi_j$); a — число; n — порядок гармоники; Δ_j — толщина оболочки S_j. Если $\Delta_j \ll \xi_j$, то для $n \gg 1$ можно ожидать совпадения приближенного метода расчета с классическим. При отношении Δ_j/ξ_j, составляющем несколько процентов, появляется погрешность, которая для $n > 5$ становится значительной (до 30 %) и является основной из погрешностей приближенного метода.

Способ определения изменения магнитной проницаемости не только по толщине оболочки, но и ее поверхности, в зависимости от величины остаточного намагничивания материала оболочки и напряженности воздействующего поля, является вторым источником погрешности. Известно [19], что тонкостенные оболочки характеризуются низкой стабильностью магнитного состояния в отличие от толстостенных оболочек. При неизменном внешнем постоянном магнитном поле размагничивающее поле толстостенных оболочек значительно больше размагничивающего поля тонкостенных оболочек. В связи с этим тонкостенные и толстостенные оболочки при воздействии постоянных магнитных полей одинаковой интенсивности имеют разные кривые намагничивания, а значит, обладают разными значениями магнитной проницаемости, что трудно учесть при проведении расчетов. Это является третьим источником погрешностей, свойственным обоим рассматриваемым методам. Для уменьшения этой погрешности при расчетах толстостенных оболочек целесообразно экран рассчитывать как многослойный, в каждом j-м слое использовать присущую ему проницаемость μ_j, рассчитывая ее с помощью аппроксимационных полиномов.

Следует отметить еще один источник погрешностей, свойственный методам расчета как тонкостенных, так и толстостенных экранирующих оболочек. Эти погрешности появляются из-за того, что почти все специальные функции, которыми пользуются при получении решений задач о распределении напряженности или потенциалов поля в ортогональных криволинейных системах координат (q_1, q_2, q_3) (функции Бесселя, Матье и др.), дают хорошее приближение для функций поля лишь в начале координат и асимптотическое. Во всей остальной области изменения специальных функций, кроме функций Лежандра, не совпадают с характером изменения напряженности или потенциалов поля. Поэтому иногда прибегают к описанию решения для внешнего пространства за экраном с помощью функций Лежандра. Это приводит к необходимости сопрягать решения для внешней граничной поверхности, полученные в разных координатных системах. Использование такого приема заставляет преобразовывать граничные условия.

2-2. ОДНОРОДНЫЕ ПОЛЯ

Сферические оболочки.

Сферы толстостенные. Используя общий метод расчета, приведенный в § 2-1, из формул (2-9) можно получить формулы для расчета экранирующих функций ν сферических оболочек. При этом в однородных помехонесущих магнитных полях формулы (2-9) упрощаются, если принять $n = 1$ (индекс m не используется на основании условия круговой симметрии) и в результирующих формулах опустить.

Сферы однослойные. Используя формулы (2-10) и данные табл. 2-1, получим (рис. 2-3, где $R_3, \ldots, R_{2\nu} \to \infty$, см., например [9])

$$Э^{с\,(1)} = 1 + (2/9)\left(1 - p_{1,2}^3\right)(\nu_{0,1} + \nu_{1,0} - 2); \qquad (2\text{-}25а)$$

$$W_{(i)}^{с\,(1)} = -\frac{2\,(\nu_{1,0} - 1)\,(\nu_{1,0} + 2)\left(1 - p_{1,2}^3\right)}{(\nu_{1,0} + 2)\,(2\nu_{1,0} + 1) - 2\,(\nu_{1,0} - 1)^2\,p_{1,2}^3}, \qquad (2\text{-}25б)$$

где $\nu_{\alpha,\beta} = \mu_\alpha/\mu_\beta$; $p_{\alpha,\beta} = R_\alpha/R_\beta$.

Формулу для эффективности экранирования однослойным сферическим экраном можно использовать в виде

$$Э^{с\,(1)} = 1 + (2/9)\,(V_м/V)\,(\nu_{0,1} + \nu_{1,0} - 2), \qquad (2\text{-}26)$$

где $V_м$ — объем, занятый ферромагнетиком; V — обьем сферы. Если положить $V_м = (4/3)\,\pi\left(R_2^3 - R_1^3\right)$, $V = (^4/_3)\pi R_2^3$, то $V_м/V = 1 - p_{1,2}^3$, т. е. снова приходим к выражению (2-25а).

Если положить $\mu_1 \gg \mu_0$, т. е. $\nu_{1,0} > 1$, то

$$Э^{с\,(1)} \approx (2/9)\,\nu_{1,0}\left(1 - p_{1,2}^3\right); \qquad (2\text{-}27а)$$

$$W_{(i)}^{с\,(1)} \approx -1. \qquad (2\text{-}27б)$$

Эффективность экранирования однослойными сферическими оболочками зависит, как следует из соотношений (2-25а) и (2-27а), от относительной магнитной проницаемости материала

Таблица 2-1

Вид оболочки	Характерные для оболочек функции							
	q_1	$a_1, F_{nm}(q_1)$	$b_1, P_{nm}(q_1)$	$Y_{nm}(q_2, q_3)$	$\frac{\partial F_{nm}(q_1)}{\partial q_1}$	$\frac{\partial P_{nm}(q_1)}{\partial q_1}$	Определитель Вронского $\Delta_{n,m}=\Delta(a_1, b_1)$	G_{nm}
Плоская (x, y, z)	z	e^{az}, $a=\sqrt{\lambda^2+\beta^2}$	e^{-az}	$e^{i(\lambda x+\beta y)}$	ae^{az}	$-ae^{-az}$	$2a$	$-a^2$
Круговая цилиндрическая (ρ, z, φ)	ρ	$I_m(\lambda\rho)$	$\widetilde{K}_m(\lambda\rho)$	$e^{i(\lambda z+m\varphi)}$	$\lambda I'_m(\lambda\rho)$	$\lvert\lambda\rvert(\operatorname{sgn}\lambda)^m\times$ $\times K_m(\lvert\lambda\rvert\rho)$	ρ^{-1}	$-\left(\frac{m^2}{\rho^2}+\lambda^2\right)$
Сферическая (r, θ, φ)	r	r^n	r^{-n-1}	$P_n^m(\cos\theta)\,e^{im\varphi}$	nr^{n-1}	$-\frac{n+1}{r^{n+2}}$	$\frac{2n+1}{r^2}$	$-\frac{n(n+1)}{r^2}$
Сфероидальная (ξ, η, φ): вытянутая	ξ	$P_n^m(\xi)$	$Q_n^m(\xi)$	$P_n^m(\eta)\,e^{im\varphi}$	$P_n^{m\prime}(\xi)$	$Q_n^{m\prime}(\xi)$	$\frac{(-1)^m(n+m)!}{(n-m)!(\xi^2-1)}$	$-\frac{n(n+1)\times(\xi^2-1)+m^2}{(\xi^2-1)^2}$
сжатая	ξ	$P_n^m(i\xi)$	$Q_n^m(i\xi)$	$P_n^m(\eta)\,e^{im\varphi}$	$iP_n^{m\prime}(i\xi)$	$iQ_n^{m\prime}(i\xi)$	$\frac{i(-1)^{m+1}(n+m)!}{(n-m)!(\xi^2+1)}$	$-\frac{n(n+1)\times(1+\xi^2)+m^2}{(1+\xi^2)^2}$

оболочки $\nu_{1,0}$ и от отношения радиусов оболочки $p_{1,2}$. Это дает возможность производить сравнение эффективности экранирования геометрически подобными оболочками, изготовленными из одинакового ферромагнитного материала.

Если преобразовать сомножитель в формуле (2-27а), стоящий в скобках, выделяя толщину оболочки Δ_1 и полагая $R \approx \approx R_1 \approx R_2$:

$$1 - p_{1,2}^3 = 3\Delta_1/R, \quad \Delta_1 = R_2 - R_1, \tag{2-28}$$

то

$$Э^{c(1)} \approx 1 + (2/3)\,\nu_{1,0}(\Delta_1/R). \tag{2-29}$$

Между эффективностью экранирования $Э^{(c)1}$ и функцией обратного действия существует взаимосвязь:

$W_{(i)}^{c(1)} \to 0$, $Э^{c(1)} \to 1$ — при слабом экранировании;

$W_{(i)}^{c(1)} \to -1$, $Э^{c(1)} \to \infty$ — при сильном экранировании.

Если поле напряженностью $\mathbf{H}^{(0)}$ находится внутри оболочки, а экранируется внешнее пространство, то эффективность экранирования $Э^{c(1)}$ при этом не меняется.

Следует отметить, что обратное действие сферического экрана на внешнее однородное поле напряженностью $\mathbf{H}^{(0)}$ эквивалентно действию диполя, момент которого пропорционален $W_{(i)}^{c1}$.

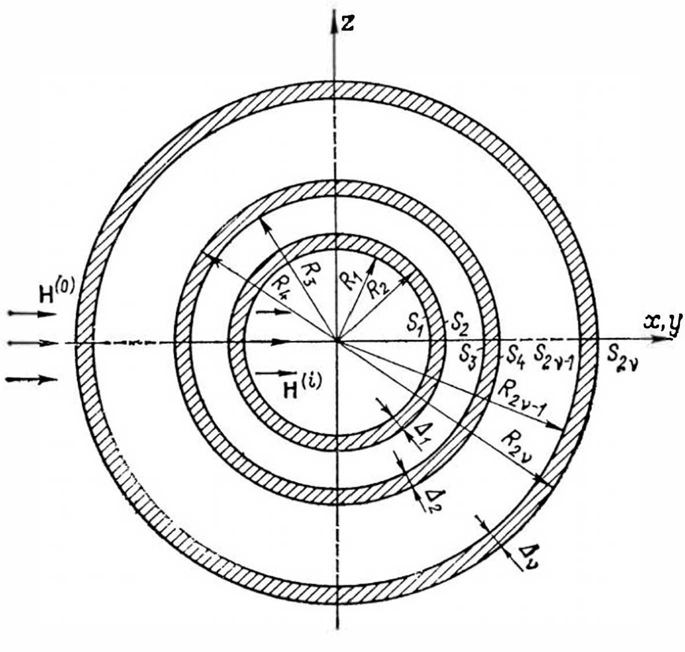


Рис. 2-3. Система толстостенных сферических оболочек в однородном магнитном поле

Сферы двухслойные. Используя формулы (2-11) и данные табл. 2-1, получим (рис. 2-3, где $R_5, \ldots, R_{2\nu} \to \infty$)

$$Э^{c\,(2)} = (1/81)\left\{\left[(1+2\nu_{2,0})(2+\nu_{2,0}) - 2(\nu_{2,0}-1)^2 p_{4,3}^3\right] \times \right.$$
$$\times \left[(1+2\nu_{1,0})(2+\nu_{1,0}) - 2(\nu_{1,0}-1)^2 p_{2,1}^3\right] -$$
$$\left. -2(\nu_{1,0}-1)(\nu_{1,0}+2)(\nu_{2,0}-1)(1+2\nu_{2,0})(p_{3,2}^3 - p_{3,1}^3)(1-p_{4,3}^3)\right\}; \tag{2-30а}$$

$$W_{(i)}^{c\,(2)} = -\left\{(\nu_{1,0}-1)(1+2\nu_{1,0})(1-p_{2,1}^3)\left[(1+2\nu_{2,0})(2+\nu_{2,0}) - \right.\right.$$
$$\left. - 2(\nu_{2,0}-1)^2 p_{4,3}^3\right] + (\nu_{2,0}-1)(1+2\nu_{2,0})(p_{3,1}^3 - p_{4,1}^3) \times$$
$$\left. \times \left[(1+2\nu_{1,0})(2+\nu_{1,0}) - 2(\nu_{1,0}-1)^2 p_{2,1}^3\right]\right\} \times$$
$$\times \left\{\left[(1+2\nu_{2,0})(2+\nu_{2,0}) - 2(\nu_{2,0}-1)^2 p_{4,3}^3\right] \times \right.$$
$$\times \left[(1+2\nu_{1,0})(2+\nu_{1,0}) - 2(\nu_{1,0}-1)^2 p_{2,1}^3\right] -$$
$$\left. -2(\nu_{1,0}-1)(\nu_{1,0}+2)(\nu_{2,0}-1)(1+2\nu_{2,0})(p_{3,2}^3 - p_{3,1}^3)(1-p_{4,3}^3)\right\}^{-1}. \tag{2-30б}$$

Формула (2-30а) для расчета $Э^{c(2)}$ громоздка и не всегда удобна при проведении инженерных расчетов.

Если считать, что оболочки выполнены из одинакового ферромагнитного материала, т. е. $\nu_{1,0} = \nu_{2,0}$, то

$$Э^{c\,(2)} = 1 + (2/9)\frac{(\nu_{1,0}-1)^2}{\nu_{1,0}}(m_{0,1} + m_{2,3} - m_{0,1}m_{2,3} + m_{0,1}m_{1,2}m_{2,3} +$$
$$+ (4/81)\frac{(\nu_{1,0}-1)^4}{\nu_{1,0}^2} m_{0,1}m_{1,2}m_{2,3}, \tag{2-31}$$

где $m_{\alpha,\beta} = 1 - p_{\alpha,\beta}^3$; $p_{\alpha,\beta} = R_\alpha / R_\beta$.

Формулу (2-31) можно представить в виде

$$Э^{c\,(2)} = 1 + \frac{2}{9}\frac{(\nu_{1,0}-1)^2}{\nu_{1,0}}\left[(1 - p_{1,2}^3 p_{3,4}^3) + \right.$$
$$\left. + \frac{2\nu_{1,0}^2 + 5\nu_{1,0} + 2}{9\nu_{1,0}} m_{1,2}m_{3,4}m_{2,3}\right]. \tag{2-32}$$

Если эффективность $Э^{c\,(1)}$ считать равной значению, полученному с помощью формулы (2-25а), то

$$Э^{c\,(2)} = Э_1^{c\,(1)} Э_2^{c\,(1)} - \frac{2}{81}\frac{(\nu_{1,0}-1)^2(2\nu_{1,0}^2 + 5\nu_{1,0} + 2)}{\nu_{1,0}^2} p_{2,3}^3 m_{1,2}m_{3,4}, \tag{2-33}$$

где нижние индексы при $Э_1^{c\,(1)}$ и $Э_2^{c\,(1)}$ означают номер слоя. При удалении внешней оболочки ($p_{2,3} \to 0$) второй член в выражении (2-33) исчезает. При $\nu_{1,0} \gg 1$ $(\mu_1 = \mu_2 \gg 1)$

$$Э^{c\,(2)} = Э_1^{c\,(1)} Э_2^{c\,(1)} + (4/81)\,\nu_{1,0}(\nu_{1,0} + 2{,}5)\,p_{2,3}^3 m_{1,2} m_{3,4}. \quad (2\text{-}34)$$

Для тонких оболочек $\Delta_j \leqslant 0{,}01 R^{\alpha}$ $(R^{(1)} \approx R_2 \approx R_1;\ R^{(2)} \approx R_3 \approx R_4;$ $\alpha = 1,\ 2)$ можно принять $m_{1,2} = 3\Delta_1/R^{(1)}$; $m_{3,4} = 3\Delta_2/R^{(2)}$.

Если ориентироваться для $Э^{c\,(1)}$ на формулу (2-28), то

$$Э^{c\,(2)} = 1 + \frac{2\nu_{1,0}}{3}\left(\frac{\Delta_1}{R^{(1)}} + \frac{\Delta_2}{R^{(2)}}\right) + \frac{4\nu_{1,0}^2 \Delta_1 \Delta_2}{9R^{(1)} R^{(2)}}\left(1 - p_{1,2}^3\right), \quad (2\text{-}35)$$

где $R^{(1)}$ и $R^{(2)}$ — средние радиусы внутренней и внешней оболочек. Выражение (2-35) упрощается, если положить $\nu_{1,0}\Delta_j/R^{(j)} \gg 1$, $j = 1,\ 2$:

$$Э^{c\,(1)} \approx 2\nu_{1,0}\Delta_1/(3R^{(1)}); \quad (2\text{-}36)$$

$$Э^{c\,(2)} \approx 4\nu_{1,0}^2 \Delta_1 \Delta_2/(9R^{(1)} R^{(2)})\left(1 - p_{1,2}^3\right). \quad (2\text{-}37)$$

Можно оценить погрешности (в процентах) представления эффективности экранирования двухслойной сферической оболочкой, сравнив уравнения (2-37) и (2-35). Результаты такой оценки представлены в табл. 2-2, где

$$\delta = \frac{Э^{c\,(2)}\,(2\text{-}35) - Э^{c\,(2)}\,(2\text{-}37)}{Э^{c\,(2)}\,(2\text{-}35)}\,100.$$

Таблица 2-2

$\frac{\nu_{1.0}\Delta}{R}$	Оценка эффективности $Э^{c\,(2)}$ по формуле		
	(2-35)	(2-37)	δ, %
1	2,6	0,26	90
2	4,7	1,04	78
4	10,5	4,16	60
8	28,3	16,6	41
16	89	66	26
32	314	270	14
64	1167	1080	7
128	4492	4320	4

Из представленных результатов следует, что использование выражения (2-37) для расчета эффективности экранирования двухслойными оболочками правомочно при $Э_j^{c\,(1)} > 10$. Если магнитная проницаемость оболочек μ_j $(j = 1,\ 2)$ различна, то уравнение (2-37) переписывается в виде

$$Э^{c\,(2)} \approx 4\nu_{1,0}\nu_{2,0}\Delta_1\Delta_2/(9R_1R_2)\left(1 - p_{1,2}^3\right). \quad (2\text{-}38)$$

Из формул для $Э^{c(2)}$ [например, (2-38)], следует, что эффективность экранирования двухслойной оболочкой получается умножением индивидуальных эффективностей оболочек на член, учитывающий их взаимовлияние. Формулу (2-38) перепишем в виде

$$Э^{с(2)} = Э_1^{с(1)} Э_2^{с(1)} \left(1 - p_{1,2}^3\right), \tag{2-39}$$

где $Э_1^{с(1)}$ и $Э_2^{с(1)}$ рассчитываются по уравнению (2-36); член в круглых скобках учитывает взаимовлияние.

Сферы многослойные. Используя формулы (2-9а), получим эффективность экранирования трехслойным сферическим экраном (рис. 2-3)

$$\begin{aligned} Э^{с(3)} &= 1 + 0{,}25 \left(\nu_{1,0} - 1\right)^2 \nu_{1,0}^{-1} \left\{\left(1 - p_{1,2}^2 p_{3,4}^2 p_{5,6}^2\right) + \right. \\ &+ 0{,}0625 \left(\nu_{1,0} + 1\right)^4 \nu_{1,0}^{-2} m_{1,2} m_{2,3} m_{3,4} m_{4,5} m_{5,6} + \\ &+ 0{,}25 \left(\nu_{1,0} + 1\right)^2 \nu_{1,0}^{-1} \left[\left(m_{1,2} m_{5,6} + m_{1,2} m_{3,4} - m_{1,2} m_{3,4} m_{5,6}\right) m_{2,3} + \right. \\ &+ \left. \left. \left(m_{1,2} m_{5,6} + m_{3,4} m_{5,6} - m_{1,2} m_{3,4} m_{5,6}\right) m_{4,5} - m_{1,2} m_{5,6} m_{2,3} m_{4,5}\right]\right\} \end{aligned} \tag{2-40}$$

при условии, что μ_j $(j = 1,\ 2,\ 3) = \mathrm{const}$; $m_{\alpha\beta} = 1 - (R_\alpha/R_\beta)^2$; $p_{\alpha,\beta} = R_\alpha/R_\beta$.

Если убрать одну из трех оболочек, то расчет можно производить по формуле (2-32) для двух оболочек независимо от того, какая из трех оболочек отсутствует.

Формально при расчете эффективности экранирования $Э^{с\nu}$ концентрическими сферическими оболочками можно использовать формулы (2-9а). Однако, учитывая уже введенные упрощения при расчете эффективности экранирования двумя оболочками $Э^{с(2)}$ без заметных погрешностей, можно аналогичный подход применить и при расчете ν оболочками. Добавление нового слоя к двухслойной оболочке приводит к снижению магнитного сопротивления системы оболочек. Новый слой шунтирует часть общего магнитного потока. Коэффициент взаимовлияния уменьшает магнитный поток, пересекающий новый слой. Эффективность экранирования каждой новой оболочкой S_j уменьшается по отношению к идеальной $Э_j^{с(1)}$ на коэффициент взаимовлияния, т. е. на $1 - p_{j-1,j}^3$. Поэтому эффективность экранирования ν оболочками записывается в виде

$$Э^{с\nu} = Э_1^{с(1)} Э_2^{с(1)} \left(1 - p_{1,2}^3\right) Э_3^{с(1)} \left(1 - p_{2,3}^3\right) \ldots\ Э_\nu^{с(1)} \left(1 - p_{\nu-1,\nu}^3\right) \tag{2-41}$$

или

$$Э^{с\nu} = \prod_{j=1}^{j=\nu} Э_j^{с(1)} \left(1 - p_{j-1,j}^3\right). \tag{2-42}$$

Сферы тонкостенные. Используя общий метод расчета, приведенный в § 2-1, из (2-21) могут быть получены формулы для расчета экранирующих функций ν тонкостенных оболочек при падении на них однородных магнитных полей ($n = 1$, индекс m не используется). Для упрощения записи индекс $n = 1$ опускается.

Сферы однослойные. Используя (2-22) и данные табл. 2-1, получим (рис. 2-4, где $R_2, \ldots, R_\nu \to \infty$)

$$Э^{с\,(1)} = 1 + \frac{4}{3}(p_1/R_1); \tag{2-43а}$$

$$W_{(a)}^{c\,(1)} = -(p_1/R_1)/[(3/4) + (p_1/R_1)], \tag{2-43б}$$

где $p_1 = \mu_1\Delta_1/(2\mu_0) = \nu_{1,0}\Delta_1/2$.

Аналогичные результаты получаются, если воспользоваться для расчета оболочек формулами (2-25а), положив $R_1 = R_2 - \Delta_1$. Тогда, пренебрегая членами в квадрате и более высокого порядка,

$$Э^{с\,(1)} = 1 + \frac{2}{3}\frac{(\nu_{1,0} - 1)^2}{\nu_{1,0}}(\Delta_1/R_2). \tag{2-44}$$

Если $\nu_{1,0}$ велико ($\nu_{1,0} \gg 1$), то

$$Э^{с\,(1)} = 1 + (2/3)\,\nu_{1,0}(\Delta_1/R_2). \tag{2-45}$$

Формула (2-45) соответствует соотношению (2-28) при условии, что $R = R_1 \approx R_2$ [10].

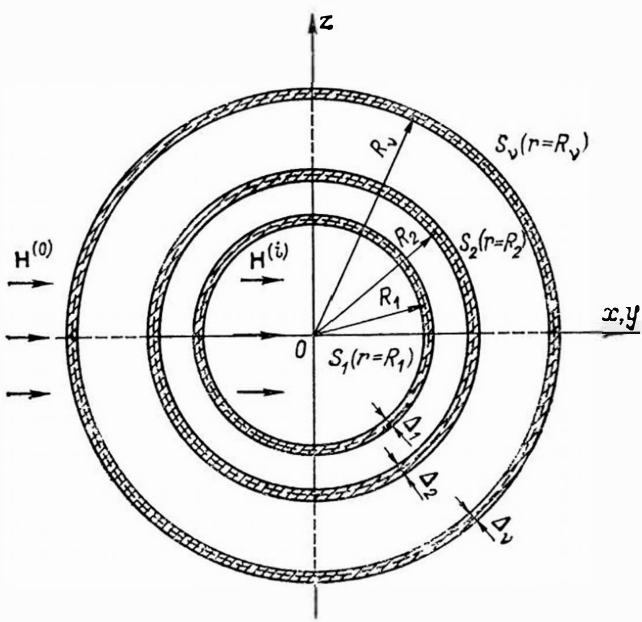


Рис. 2-4. Система тонкостенных сферических оболочек

Сферы двухслойные. Используя (2-23), получим (рис. 2-4, где $R_3, \ldots, R_\nu \to \infty$)

$$Э^{c\,(2)} = \frac{4}{9}\left\{\left[2(p_1/R_1)+\frac{3}{2}\right]\left[2(p_2/R_2)+\frac{3}{2}\right]-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3\frac{4p_1p_2}{R_1R_2}\right\}; \quad (2\text{-}46а)$$

$$W_{(a)}^{c\,(2)} = -\frac{(p_2/R_2)\left[2(p_1/R_1)+\frac{3}{2}\right]-(p_1/R_1)\left[2(p_2/R_2)+\frac{3}{2}\right]\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3}{\frac{1}{2}\left[2(p_1/R_1)+\frac{3}{2}\right]\left[2(p_2/R_2)+\frac{3}{2}\right]-(R_1/R_2)^3(p_1p_2/R_1R_2)}. \quad (2\text{-}46б)$$

Формула для расчета $Э^{c(2)}$ ранее использовалась в работе [48] при $\mu_1 = \mu_2$.

Сферы многослойные. При расчете эффективности экранирования многослойными оболочками (рис. 2-4) можно воспользоваться формулой (2-42). Эффективность экранирования для каждой из оболочек при этом определяется соотношением (2-43а). При использовании представленных формул для определения эффективности экранирования системой сферических оболочек важно правильно оценить магнитное состояние материала. Если $\mu \gg \mu_0$ (этого добиваются при создании экрана), то через экран идет весь магнитный поток. Плотность потока в материале сферического экрана $\mathbf{B}$ среднего радиуса R_1, толщиной Δ и магнитной проницаемостью μ при падении на него помехонесущего магнитного поля напряженностью $\mathbf{H}^{(0)}$ будет

$$\mathbf{B} \approx 3\mathbf{H}^{(0)}R_1\mu_0/(2\Delta_1) \quad (2\text{-}47)$$

при условии, что общий магнитный поток составит $\Phi = 3\mathbf{H}^{(0)}\pi R_1^2\mu_0$, а проходить он должен через ферромагнитную сферу площадью сечения $2\pi R_1\Delta_1$. Формула (2-47) может использоваться при анализе однослойного экрана и внешней оболочки многослойного экрана. Плотность магнитного потока во внутреннем слое двухслойной оболочки, например, будет ниже. Об этом следует помнить, чтобы выбрать начальную проницаемость μ ближе к рабочей. Если считать плотность магнитного потока в наружном слое $\mathbf{B}^{(1)}$ двухслойного экрана в виде (2-47), то плотность магнитного потока во втором (внутреннем) слое составит

$$\mathbf{B}^{(2)} \approx 3\mathbf{H}^{(0)}R_2/\left[2\Delta_2Э^{c\,(1)}\left(1-p_{1,2}^3\right)\right]. \quad (2\text{-}48)$$

Член $Э^{c\,(1)}\left(1-p_{1,2}^3\right)$ дает уменьшение плотности потока из-за экранирующего эффекта внешнего слоя. Точность расчета эффективности экранирования системой сферических оболочек увеличится, если воспользоваться результатами проводимого анализа.

Рассматривая сферическую оболочку и обозначая через $\mathbf{H}$ и $\mathbf{H}^{(i)}$ напряженность магнитного поля в материале экрана и в экранированном пространстве, получим

$$\mathbf{H} \approx \mathbf{H}^{(i)}. \quad (2\text{-}49)$$

Учитывая, что $Э^{c\,(1)} = \mathbf{H}^{(0)}/\mathbf{H}^{(i)} \approx 2\nu_{1,0}\Delta_1/(3R_1)$, $\mathbf{H} = 3\mathbf{H}^{(0)}R_1/(2\Delta_1\nu_{1,0})$. Напряженность магнитного поля в материале экрана равна приблизительно напряженности в экранированном пространстве.

Обычно экранирующие материалы высоко реманентны. Поэтому важно всегда правильно учитывать влияние остаточной напряженности поля на намагничивание материала. Можно считать [48], что

$$\mathbf{B} + \mathbf{B}_r \approx 3\mathbf{H}^{(0)}\mu_0 l/(4\Delta_1), \tag{2-50}$$

где $\mathbf{B}_r$ — вектор плотности остаточного потока. Желательно, чтобы векторы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}_r$ действовали согласно. В реальных условиях $\mathbf{B}_r$ может изменяться от 0 до значения, бо́льшего $\mathbf{B}$, и в любом направлении по отношению к $\mathbf{B}$. Представляют интерес два случая: $\mathbf{B}_r = 0$ и

$$\mathbf{B}_r = 3\mathbf{H}^{(0)} l \mu_0/(4\Delta_1). \tag{2-51}$$

Первый случай уже рассматривался. Во втором случае $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{H} = 0$ и $\mathbf{H}^{(i)} = 0$. Поскольку напряженность поля внутри оболочки равна нулю, $Э^{c\,(1)} \to \infty$.

Остаточное намагничивание важно учитывать при экранировании из-за двух причин: если остаточное намагничивание не принимается в расчет, то напряженность поля внутри экрана не может быть рассчитана точно и может существенно отличаться от предсказанного значения; если остаточное намагничивание принимать в расчет, этой погрешности можно избежать. Любая самая низкая напряженность поля, включая ее отсутствие, может быть проконтролирована по остаточному намагничиванию.

Формула (2-51) может быть перестроена, чтобы определить максимальный размер экрана, для которого достижимо обеспечение отсутствия напряженности:

$$l_{\max} = 4\Delta_1 \mathbf{B}_{r\,\max}/(3\mathbf{H}^{(0)}\mu_0). \tag{2-52}$$

Формулы (2-51) и (2-52) приведены для однослойной оболочки. В многослойном экране остаточную напряженность поля внутри слоя необходимо контролировать. В этом случае поле напряженностью $\mathbf{H}^{(0)}$ должно быть заменено полем, действующим на внутренний слой. Это будет поле с напряженностью $(\mathbf{H}^{(0)}Э^{c\,(1)}/Э^{cv})$, где $Э^{cv}$ и $Э^{c\,(1)}$ — эффективность экранирования всей системой оболочек и внутреннего слоя. Тогда

$$\mathbf{B}_r \approx 3\mathbf{H}^{(0)} l_1 Э^{c\,(1)} \mu_0/(4\Delta_1 Э^{cv}). \tag{2-53}$$

Остаточное намагничивание может быть использовано, чтобы проводить поля требуемой напряженности в нужном направлении. Максимальная напряженность этого поля определяется коэрцитивной силой материала экрана.

Сфероидальные оболочки.

Сфероиды толстостенные. Сфероидальные оболочки, или эллипсоиды вращения, могут быть получены из трехосных эллип-

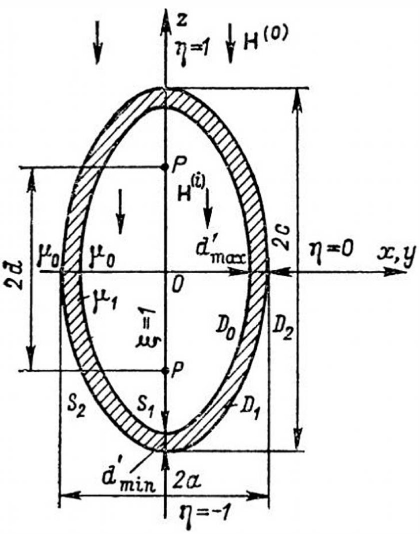


Рис. 2-5. Вытянутый толстостенный однослойный сфероид в однородном магнитном поле

соидов (§ 4-1), если какие-либо из полуосей a, b, c, например a и b, равны между собой. Уравнение имеет вид

$$x^2/a^2 + y^2/a^2 + z^2/c^2 = 1.$$

Если $a < c$, то сфероидальная оболочка называется вытянутой (рис. 2-5), если $a > c$, то — сжатой (рис. 2-6). У сфероидов положение двух его осей неопределенно.

Сфероид можно определить как поверхность, получаемую равномерным сжатием сферы к ее экватору. Сжатый сфероид получается, когда коэффициент сжатия $k < 1$, вытянутый сфероид — $k > 1$. Если $a = b = c$, сфероид обращается в сферу и теперь положение всех трех осей становится неопределенным. Эффективность экранирования рассчитывается при условии, что сфероид находится в однородном магнитном поле, параллельном оси вращения. Используя общий метод расчета, представленный в § 2-1, из (2-9) с учетом данных табл. 2-1 можно получить формулы для расчета эффективности экранирования и функций обратного действия ν конфокальными сфероидами.

Сфероиды однослойные.

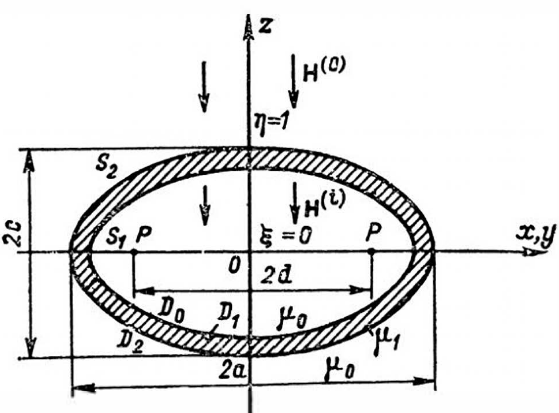


Рис. 2-6. Сжатый толстостенный однослойный сфероид в однородном магнитном поле

1. Сфероид вытянутый. Для однородного магнитного поля напряженностью $\mathbf{H}^{(0)}$, направленной параллельно оси вращения (рис. 2-5), используя выражения (2-10) и данные табл. 2-1 при $n=1$ (индекс m на основании условия симметрии не используется), получим

$$Э_{\|}^{\text{сф}\,(1)} = \nu_{0,1}\{(\nu_{1,0}-1)^2\,\xi_1 Q_1(\xi_2)\,Q_1'(\xi_2) - [\nu_{1,0}\xi_1 Q_1'(\xi_1) - Q_1(\xi_1)]\times$$
$$\times[\nu_{1,0}Q_1(\xi_2) - \xi_2 Q_1'(\xi_2)]\}(\xi_1^2-1)(\xi_2^2-1); \tag{2-54а}$$
$$W_{(a)}^{\text{сф}\,(1)} = \{(\nu_{1,0}-1)\{\nu_{1,0}Q_1(\xi_1)\,Q_1(\xi_2)\,[Q_1'(\xi_1) - Q_1'(\xi_2)] +$$
$$+[Q_1(\xi_2)\,\xi_1 - Q_1(\xi_1)\,\xi_2]\,Q_1'(\xi_1)\,Q_1'(\xi_2)\,\xi_1\}\}\{\{(\nu_{1,0}-1)^2\,\xi_1 Q_1(\xi_2)\,Q_1'(\xi_2) -$$
$$-[\nu_{1,0}\xi_1 Q_1'(\xi_1) - Q_1(\xi_1)]\,[\nu_{1,0}Q_1(\xi_2) - \xi_2 Q_1'(\xi_2)]\}\,Q_1(\xi_1)\}^{-1}, \tag{2-54б}$$

где $\nu_{\alpha,\beta} = \mu_\alpha/\mu_\beta$.

Для однородного магнитного поля напряженностью $\mathbf{H}^{(0)}$, направленной перпендикулярно оси вращения, при $n=1$ и $m=1$

$$Э_{\perp}^{\text{сф}\,(1)} = \frac{\nu_{0,1}}{4}[(\nu_{1,0}-1)^2 P_1^1(\xi_1)\,P_1^{1\prime}(\xi_1)\,Q_1^1(\xi_2)\,Q_1^{1\prime}(\xi_2) - B]\times$$
$$\times(\xi_1^2-1)(\xi_2^2-1); \tag{2-55а}$$
$$W_{(a)}^{\text{сф}\,(1)} = \{(\nu_{1,0}-1)\{\nu_{1,0}Q_1^1(\xi_1)\,Q_1^1(\xi_2)\,[Q_1^{1\prime}(\xi_1)\,P_1^{1\prime}(\xi_2) -$$
$$-Q_1^{1\prime}(\xi_2)\,P_1^{1\prime}(\xi_1)] + A\}\}\{[(\nu_{1,0}-1)^2 P_1^1(\xi_1)\,P_1^{1\prime}(\xi_1)\,Q_1^1(\xi_2)\,Q_1^{1\prime}(\xi_2) - B]\times$$
$$\times[Q_1^1(\xi_1)/P_1^1(\xi_1)]\}^{-1}, \tag{2-55б}$$

где $A = Q_1^{1\prime}(\xi_1)\,Q_1^{1\prime}(\xi_2)\,[Q_1^1(\xi_2)\,P_1^1(\xi_1) - Q_1^1(\xi_1)\,P_1^1(\xi_2)]$; $B = [\nu_{1,0}P_1^1\times$
$\times(\xi_1)\,Q_1^{1\prime}(\xi_1) - P_1^{1\prime}(\xi_1)\,Q_1^1(\xi_1)]\,[\nu_{1,0}Q_1^1(\xi_2)\,P_1^{1\prime}(\xi_2) - P_1^1(\xi_2)\,Q_1^{1\prime}(\xi_2)]$.

2. Сфероид сжатый. Для однородного магнитного поля напряженностью $\mathbf{H}^{(0)}$, направленной параллельно оси вращения (рис. 2-6), используя (2-10) и данные табл. 2-1 при $n=1$, получим

$$Э_{\|}^{\text{сф}\,(1)} = \nu_{0,1}\{[Q_1(i\xi_1) - \nu_{1,0}\xi_1 Q_1'(i\xi_1)]\,[\xi_2 Q_1'(i\xi_2) - \nu_{1,0}Q_1(i\xi_2)] +$$
$$+(\nu_{1,0}-1)^2\,\xi_1 Q_1(i\xi_2)\,Q_1'(i\xi_2)\}(\xi_1^2+1)(\xi_2^2+1); \tag{2-56а}$$
$$W_{(a)}^{\text{сф}\,(1)} = \{(\nu_{1,0}-1)\{\nu_{1,0}Q_1(i\xi_1)\,Q_1(i\xi_2)\,[Q_1'(i\xi_1) - Q_1'(i\xi_2)] +$$
$$+Q_1'(i\xi_1)\,Q_1'(i\xi_2)\,[\xi_1 Q_1(i\xi_2) - \xi_2 Q_1(i\xi_1)]\,\xi_1\}\}\{\{[Q_1(i\xi_1) - \nu_{1,0}\xi_1 Q_1'(i\xi_1)]\times$$
$$\times[\xi_2 Q_1'(i\xi_2) - \nu_{1,0}Q_1(i\xi_2)] + (\nu_{1,0}-1)^2\,\xi_1 Q_1(i\xi_2)\,Q_1'(i\xi_2)\}\,Q_1(i\xi_1)\}^{-1}. \tag{2-56б}$$

Для однородного магнитного поля напряженностью $\mathbf{H}^{(0)}$, направленной порпендикулярно оси вращения, при $n=1$ и

$m = 1$

$$Э_{\perp}^{сф\,(1)} = \frac{\nu_{0,1}}{4}\left[(\nu_{1,0}-1)^2 P_1^1(i\xi_1)\,P_1^{1\prime}(i\xi_1)\,Q_1^1(i\xi_2)\,Q_1^{1\prime}(i\xi_2) - B\right]\times$$
$$\times(\xi_1^2+1)(\xi_2^2+1); \qquad (2\text{-}57а)$$

$$W_{(a)}^{сф\,(1)} = \{(\nu_{1,0}-1)\{\nu_{1,0}Q_1^1(i\xi_1)\,Q_1^1(i\xi_2)\left[Q_1^{1\prime}(i\xi_1)\,P_1^{1\prime}(i\xi_2) -\right.$$
$$\left.- Q_1^{1\prime}(i\xi_2)\,P_1^{1\prime}(i\xi_1)\right] + A\}\}\left\{\left[(\nu_{1,0}-1)^2 P_1^1(i\xi_1)\,P_1^{1\prime}(i\xi_1)\,Q_1^1(i\xi_2)\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times Q_1^{1\prime}(i\xi_2) - B\right]\left[Q_1^1(i\xi_1)/P_1^1(i\xi_1)\right]\right\}^{-1}. \qquad (2\text{-}57б)$$

Формулы для расчета эффективности экранирования и функций обратного действия вытянутым и сжатым сфероидами различаются лишь аргументами в полиномах и присоединенных функциях Лежандра: в первом случае — ξ_j, во втором — $i\xi_j$, $i = \sqrt{-1}$.

От формул для расчета экранирующих функций сфероидов можно перейти к формулам (2-25) для сферического экрана. Достаточно положить $\varepsilon \to 0$ ($\varepsilon = \sqrt{1-(a^2/c^2)}$ — эксцентриситет). Тогда $\xi_j \to R_j/p$, где $p = \varepsilon c$ — полюсное расстояние.

Следует отметить, что у конфокальных сфероидов толщина стенок уменьшается к полюсам. В этом случае $\Delta(\eta = \pm 1) = (a/c)\,\Delta_a$, где Δ_a — толщина стенки в экваториальной плоскости ($\eta = 0$). При однородном помехонесущем магнитном поле напряженностью $\mathbf{H}^{(0)}$ поле в полости оболочки однородно с напряженностью $\mathbf{H}^{(i)}$. Расчет эффективности экранирования может быть выполнен с помощью коэффициента размагничивания N_c (по оси с полуосью c):

$$Э^{сф\,(1)} = 2\nu_{1,0}(\Delta_a/a)\,N_c, \qquad (2\text{-}58)$$

где $N_c = \dfrac{\operatorname{arctg}\varepsilon - \varepsilon}{\varepsilon^3}(a^2/c^2)$.

При $\varepsilon \to 0$ получаем эффективность экранирования сферической оболочкой

$$Э^{с\,(1)} = \lim_{\varepsilon\to 0} Э^{сф\,(1)} = \frac{2}{3}(\Delta_a/a)\,\nu_{1,0},$$

откуда

$$\left(Э^{сф\,(1)}/Э^{с\,(1)}\right) = 1/(3N_c). \qquad (2\text{-}59)$$

Экранирующее действие тем меньше, чем длинее сфероид.

3. Сфероиды, ограничивающие оболочку, неконфокальны. При этом толщина стенок экрана не меняется к полюсам ($\Delta_a = \Delta = \mathrm{const}$). Поле в полости оболочки становится неоднородным. Если считать, что в обоих случаях (для конфокальных и неконфокальных сфероидов) толщины стенок на экваторе равны, напряженность магнитного поля во втором случае всегда меньше. При этом в экваториальной плоскости напряженность

магнитного поля для конфокальных и неконфокальных сфероидов различается незначительно, не более чем на 4 %. По мере приближения к полюсам напряженность поля у неконфокальных сфероидов снижается и составляет не более половины напряженности поля, которая имеет место в экваториальной плоскости.

Напряженность неоднородного поля внутри сфероида описывается рядом [38]

$$\mathbf{H}^{(i)}(\xi,\ \eta) = \sum_n A_n P_n(\xi) P_n(\eta), \quad 1 \leqslant \xi \leqslant \xi_0,\ n = 1,\ 3,\ \ldots,\ \infty, \tag{2-60}$$

где $P_n(\xi)$, $P_n(\eta)$ — полиномы Лежандра первого рода; A_n — постоянные интегрирования; ξ, η — координаты сфероида; $\xi = \xi_0$ — внутренняя поверхность оболочки.

Из всех постоянных интегрирования A_n, как показывают расчеты, следует удерживать лишь A_1 и A_3, потому что более высокие члены быстро уменьшаются. Используя выкладки [38], получим

$$\mathbf{H}_m = \mathbf{H}^{(i)}\left[1 - \frac{\varepsilon^2}{10} + \frac{\varepsilon^2 - (5z^2/c^2)}{5 - 3\varepsilon^2}\,\frac{\varepsilon^2}{5} - \ldots\right];$$
$$\mathbf{H}_e = \mathbf{H}^{(i)}\left[1 - \frac{\varepsilon^2}{10} + \frac{\varepsilon^2 + (5r^2/2c^2)}{5 - 3\varepsilon^2}\,\frac{\varepsilon^2}{5} - \ldots\right], \tag{2-61}$$

где $\mathbf{H}_m$ — напряженность поля на средней линии; $\mathbf{H}_e$ — напряженность поля в плоскости экватора; z — координата от средней точки ($z = 0$); r — радиальное удаление от средней точки ($r = 0$): $r = b\varepsilon\sqrt{\xi^2 - 1}$. Результирующее поле в полости сфероида состоит из однородной части, которая имеет напряженность на $1 - \varepsilon^2/10$ ме́ньшую, чем для конфокальных сфероидов, и неоднородной части. Напряженность результирующего поля в средней точке сфероида

$$\mathbf{H}_g = (\mathbf{H}_m)_{z=0} = (\mathbf{H}_e)_{r=0} = \mathbf{H}^{(i)}\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{10} + \frac{\varepsilon^4}{5(5 - 3\varepsilon^2)}\right) \tag{2-62}$$

и минимальна при $\varepsilon = 0$ и при $\varepsilon = 1$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{H}_g = \mathbf{H}^{(i)}; \quad \lim_{\varepsilon \to 1} \mathbf{H}_g = \mathbf{H}^{(i)}. \tag{2-63}$$

При $\varepsilon^2 = 0{,}5$ $c = \sqrt{2}\,a$, а $(\mathbf{H}_g)_{\min} \approx 0{,}964\ \mathbf{H}^{(i)}$.

Можно определить, что $\mathbf{H}_g$ в средней точке сфероида имеет постоянное значение, меньшее, чем определенное по формуле

$$\mathbf{H}^{(i)} = \mathbf{H}^{(0)}(a/\Delta_a)/(2\nu_{1,0}N_b). \tag{2-64}$$

Для сфероидов с $\Delta = \text{const}$ при расчете эффективности экранирования в средней точке в первом приближении можно использовать выражения (2-54). Если приближаться в плоскости экватора к стенке ($r \to a$), то

$$(\mathbf{H}_e)_{r=a} = \mathbf{H}^{(i)}. \tag{2-65}$$

Напряженность на средней линии к полюсу ($z = c$) принимаем

$$\mathbf{H}_m|_{z=c} = \mathbf{H}^{(i)}\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{10} + \frac{5-\varepsilon^2}{5-3\varepsilon^2}\frac{\varepsilon^2}{5} - \ldots\right). \qquad (2\text{-}66)$$

Если $\varepsilon^2 = 0{,}5$, то $\mathbf{H}_m|_{z=c} \approx 0{,}82\,\mathbf{H}^{(i)}$.

Эта величина уменьшается в бо́льшей мере, если эксцентриситет ε растет:

$$\lim_{\varepsilon \to 1}(\mathbf{H}_m|_{z=c}) \approx 0{,}5\,\mathbf{H}^{(i)}. \qquad (2\text{-}67)$$

Напряженность магнитного поля на полюсе сфероида в два раза меньше, чем в средней точке сфероида ($z = 0$). Используя полученные результаты, можно представить эффективность экранирования неконфокальным сфероидом в виде

$$Э^{\text{сф}\,(1)}(\Delta = \text{const})|_{z=0} \approx Э^{\text{сф}\,(1)}\left(1 - 0{,}1\varepsilon^2 + \frac{0{,}2\varepsilon^4}{(5-3\varepsilon^2)}\right)^{-1}; \quad (2\text{-}68)$$

$$Э^{\text{сф}\,(1)}(\Delta = \text{const})|_{z=c} \approx Э^{\text{сф}\,(1)}\left(1 - 0{,}1\varepsilon^2 + \frac{0{,}2\varepsilon^2 - 0{,}04\varepsilon^4}{1-0{,}75\varepsilon^2}\right)^{-1}, \quad (2\text{-}69)$$

где $Э^{\text{сф}\,(1)}$ определяется по выражениям (2-54).

Функция $Э^{\text{сф}\,(1)}$ ($\Delta = \text{const}$) зависит от эксцентриситета ε и от расположения точки на оси сфероида.

Многие технические экраны выполняются в виде круговых цилиндров, имеющих длину L, диаметр D и толщину стенок Δ. На обоих концах используются крышки с той же толщиной Δ. Точный расчет цилиндрических экранов с конечной длиной затруднителен. В этих случаях можно заменить цилиндрический экран идеализированным в форме сфероида с диаметром $D = 2a$, длиной $L = 2c$ и толщиной стенок $\Delta = \Delta_a = \text{const}$.

Сфероиды многослойные.

Формулы для расчета эффективности экранирования и функций обратного действия многослойными сфероидами могут быть получены из формул (2-9) — для экранирования ν оболочками и из (2-11) — для экранирования двухслойными оболочками.

Сфероиды тонкостенные. Используя общий метод расчета, представленный в § 2-1, из выражений (2-11) с учетом данных табл. 2-1 можно получить формулы для расчета эффективности экранирования и функций обратного действия ν конфокальными тонкостенными сфероидами.

Сфероиды однослойные.

1. Сфероид вытянутый. Для однородного магнитного поля напряженностью $\mathbf{H}^{(0)}$, направленной параллельно оси вращения (рис. 2-7, где $\xi_2 \to \infty$), используя формулы (2-22) и данные табл. 2-1 при $n = 1$ (индекс m на основании условия симметрии не используется), получим

$$Э_{\parallel}^{\text{сф}\,(1)} = 1 + 4p_1\xi_1 Q_1(\xi_1); \qquad (2\text{-}70\text{а})$$

$$W_{(a)}^{\text{сф}\,(1)} = -\frac{4p_1\xi_1\,[Q_1(\xi_1)]^2}{Q_1(\xi_1)\,[1 + 4p_1 Q_1(\xi_1)\,\xi_1]}, \qquad (2\text{-}70\text{б})$$

где $p_1 = \mu_1 \Delta_a/(2\mu_0)$, Δ_a — толщина сфероида в экваториальном сечении.

Для магнитного поля напряженностью $\mathbf{H}^{(0)}$, направленной перпендикулярно оси вращения, при $n=1$ и $m=1$

$$Э_{\perp}^{сф\,(1)} = 1 - p_1 Q_1^1(\xi_1) P_1^1(\xi_1)\left[2\left(\xi_1^2-1\right)+1\right]\left(\xi_1^2-1\right)^{-1}; \quad (2\text{-}71а)$$

$$W_{(a)}^{сф\,(1)} = -\frac{p_1 P_1^1(\xi_1)\left[Q_1^1(\xi_1)\right]^2\left[2\left(\xi_1^2-1\right)+1\right]}{\left\{\left(\xi_1^2-1\right) - p_1 P_1^1(\xi_1) Q_1^1(\xi_1)\left[2\left(\xi_1^2-1\right)+1\right]\right\} Q_1^1(\xi_1)}. \quad (2\text{-}71б)$$

2. Сфероид сжатый. Для однородного магнитного поля напряженностью $\mathbf{H}^{(0)}$, направленной параллельно оси вращения (рис. 2-8, где $\xi_2 \to \infty$), используя формулы (2-22) и данные табл. 2-1 при $n = 1$, получим

$$Э_{\parallel}^{сф\,(1)} = 1 - 4p_1\xi_1 Q_1(i\xi_1); \quad (2\text{-}72а)$$

$$W_{(a)}^{сф\,(1)} = -\frac{4p_1\xi_1\left[Q_1(i\xi_1)\right]^2}{Q_1(i\xi_1)\left[1-4p_1Q_1(i\xi_1)\,\xi_1\right]}. \quad (2\text{-}72б)$$

Для магнитного поля напряженностью $\mathbf{H}^{(0)}$, направленной перпендикулярно оси вращения, при $n=1$ и $m=1$

$$Э_{\perp}^{сф\,(1)} = 1 - ip_1 P_1^1(i\xi_1) Q_1^1(i\xi_1)\left[2\left(1+\xi_1^2\right)+1\right]\left(1+\xi_1^2\right)^{-1}; \quad (2\text{-}73а)$$

$$W_{(i)}^{сф\,(1)} = -\frac{ip_1 P_1^1(i\xi_1)\left[Q_1^1(i\xi_1)\right]^2\left[2\left(1+\xi_1^2\right)+1\right]}{\left\{\left(1+\xi_1^2\right) - ip_1 P_1^1(i\xi_1) Q_1^1(i\xi_1)\left[2\left(1+\xi_1^2\right)+1\right]\right\} Q_1^1(i\xi_1)}. \quad (2\text{-}73б)$$

Сравнение формул для расчета эффективности экранирования и функций обратного действия, полученных с помощью точных граничных условий в виде (2-54)—(2-57) и с помощью эквивалентных граничных условий в виде (2-70)—(2-73), показывает что последние формулы более просты и удобны в обращении. У оболочек с толщинами $\Delta_a \to 0$ и изготовленных из материала с достаточно большой магнитной проницаемостью эти функции совпадают.

Полиномы Лежандра первого и второго рода — $P_1(x)$, $Q_1(x)$ и присоединенные функции Лежандра

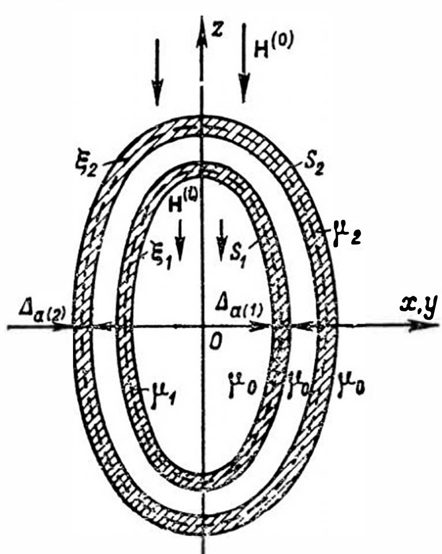


Рис. 2-7. Вытянутый тонкостенный двухслойный сфероид в однородном магнитном поле

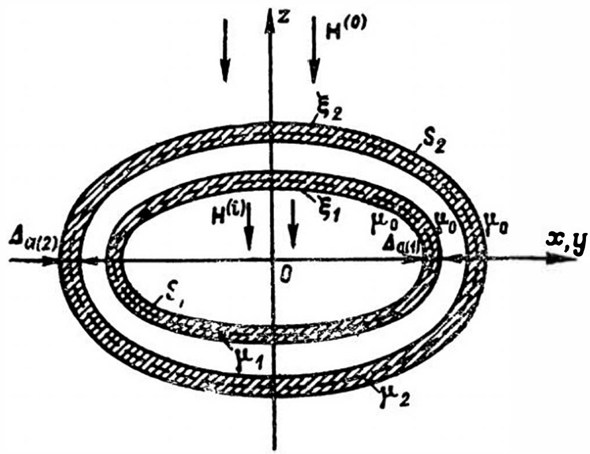


Рис. 2-8. Сжатый тонкостенный двухслойный сфероид в однородном магнитном поле

первого и второго рода — $P_1^1(x)$, $Q_1^1(x)$ используются в виде [15]

$$P_1(x) = x; \quad Q_1(x) = 0{,}5x \ln[(1+x)/(1-x)] - 1;$$

$$P_1^1(x) = (1-x^2)^{1/2}; \quad Q_1^1(x) = (x^2-1)^{1/2}\left[\frac{x}{x^2-1} - 0{,}5 \ln \frac{x+1}{x-1}\right].$$

Расчет эллипсоидов вращения с использованием опорного эллипсоида. Метод предложен в работе [19]. По аналогии с расчетом, выполненным в § 2-1 для тонкостенных оболочек, здесь использованы эквивалентные граничные условия:

$$\left.\frac{\partial v_3}{\partial \xi}\right|_{\xi=\xi_2} - \left.\frac{\partial v_1}{\partial \xi}\right|_{\xi=\xi_1} = \frac{1}{d(\varepsilon^2-1)}\left\{\delta \frac{\partial v^{(3)}}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi}[d(\varepsilon^2-1)] + \nu_{1,0} \times \right.$$

$$\left.\left. \times \delta \frac{\partial}{\partial \eta}\left[d(1-\eta^2)\frac{\partial v^{(3)}}{\partial \eta}\right] + \nu_{1,0}\delta \frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\frac{d(\xi^2-\eta^2)}{(\xi^2-1)(1-\eta^2)} \frac{\partial v^{(3)}}{\partial \varphi}\right]\right\}\right|_{\xi=\xi_2};$$

$$v_3|_{\xi=\xi_0} = v_1|_{\xi=\xi_0}, \tag{2-74}$$

где v_2 и v_3 — скалярные потенциалы магнитного поля до оболочки и за ней; ξ_1, ξ_2 — поверхности, ограничивающие реальную оболочку эллипсоида; d — фокусное расстояние; ε — эксцентриситет; δ — отношение абсолютной толщины к радиусу оболочки; $\xi = \xi_0$ — опорный эллипсоид, $\xi_0 = (\xi_1 + \xi_2)/2$.

1. Эллипсоид вытянутый (рис. 2-5). Напряженность магнитного поля приложена перпендикулярно оси эллипсоида:

$$Э_{\perp}^{\text{сф}\,(1)} = \frac{(2\xi_0^2 - 1)\,\nu_{1,0}\,\delta P_1^1(\xi_0)\,Q_1^1(\xi_0) - 2(\xi_0^2-1)}{(2\xi_0^2-1)\,\nu_{1,0}\,\delta\,[P_1^1(\xi_0)]^2\,Q_1^1(\xi_0)\,d}. \tag{2-75}$$

Напряженность магнитного поля приложена параллельно оси эллипсоида:

$$Э_{\parallel}^{сф\,(1)} = \frac{\nu_{1,0}\delta Q_1(\xi_0) + 0{,}5}{d\nu_{1,0}\delta\xi_0^2 Q_1(\xi_0)}, \qquad (2\text{-}76)$$

где $\delta = \delta_{min}/d$; $\xi_0 = (r_1 + r_2)/(2d)$; r_1 и r_2 — радиусы внутренней и наружной окружностей эллипсоида в экваториальном сечении; d — фокусное расстояние.

2. Эллипсоид сжатый (рис. 2-6). Напряженность магнитного поля приложена перпендикулярно к оси эллипсоида —

$$Э_{\perp}^{сф(1)} = \{\nu_{1,0}\delta' P_1^1(i\xi_0) Q_1^1(i\xi_0) + [(\xi_0^2+1)^2/(2\xi^2+1)]\,[Q_1^1(i\xi_0) P_1^{1\prime}(i\xi_0) -$$
$$- Q_1^{1\prime}(i\xi_0) P_1'(i\xi_0)]\}\,\{(d/i)\,\nu_{1,0}\delta' [P_1^1(i\xi_0)]^2 Q_1^1(i\xi_0)\}^{-1}. \qquad (2\text{-}77)$$

Напряженность магнитного поля приложена параллельно оси эллипсоида —

$$Э_{\parallel}^{сф\,(1)} = \{\nu_{1,0}\delta' P_1(i\xi_0) Q_1(i\xi_0) + (\xi_0^2+1)/2\,[Q_1(i\xi_0) P_1'(i\xi_0) -$$
$$- Q_1'(i\xi_0) P_1(i\xi_0)]\}\,\{(d/i)\,\nu_{1,0}\delta' [P_1(i\xi_0)]^2 Q_1(i\xi_0)\}^{-1}, \qquad (2\text{-}78)$$

где $\delta' = d'_{max}/d$; $d'_{max} = r_2 - r_1$.

Формулы (2-75)—(2-78) являются приближенными, однако с достаточной для инженерных приложений точностью их можно использовать для расчета толстостенных ферромагнитных оболочек.

Сфероиды многослойные.

Для расчета эффективности экранирования двухслойными ($\nu = 2$) сфероидальными оболочками и функций обратного действия можно использовать формулы (2-23).

1. Сфероид вытянутый (рис. 2-7). Для однородного магнитного поля напряженностью $\mathbf{H}^{(0)}$, направленной параллельно оси вращения, используя (2-23) и данные табл. 2-1 при $n = 1$ (индекс m из условия симметрии не используется), получим

$$Э_{\parallel}^{сф\,(2)} = (\xi_1^2 - 1)(\xi_2^2 - 1)\{[2p_1 P_1(\xi_1) Q_1(\xi_1) - (\xi_1^2 - 1)^{-1}] \times$$
$$\times [2p_2 P_1(\xi_2) Q_1(\xi_2) - (\xi_2^2 - 1)^{-1}] - 4p_1 p_2 [P_1(\xi_2) Q_1(\xi_1)]^2\}; \qquad (2\text{-}79a)$$

$$W_{(i)}^{сф\,(2)} = [Q_1(\xi_1)/P_1(\xi_1)]\,\{p_1 [P_1(\xi_1)]^2 [p_1 P_1(\xi_1) Q_1(\xi_1) -$$
$$- 0{,}5(\xi_1^2 - 1)^{-1}] - p_2 [P_1(\xi_2)]^2 [p_2 P_1(\xi_2) Q_1(\xi_2) -$$
$$- 0{,}5(\xi_2^2 - 1)^{-1}]\}/\{[p_1 P_1(\xi_1) Q_1(\xi_1) - 0{,}5(\xi_1^2 - 1)^{-1}] \times$$
$$\times [p_2 P_1(\xi_2) Q_1(\xi_2) - 0{,}5(\xi_2^2 - 1)^{-1}] - p_1 p_2 [P_1(\xi_2) Q_1(\xi_1)]^2\},$$

где ξ_1 и ξ_2 — координаты внутреннего и внешнего слоев оболочки; $p_j = \mu_j \Delta_{a_j}/(2\mu_0)$, $j = 1, 2$; Δ_{a_j} — толщина сфероидальных оболочек в экваториальном сечении.

Для магнитного поля напряженностью $\mathbf{H}^{(0)}$, направленной перпендикулярно оси вращения, при $n=1$ и $m=1$

$$Э_{\perp}^{сф\,(2)}=(\xi_1^2-1)(\xi_2^2-1)\{[2p_1P_1^1(\xi_1)Q_1^1(\xi_1)-(\xi_1^2-1)^{-1}]\times$$
$$[2p_2P_1^1(\xi_2)Q_1^1(\xi_2)-(\xi_2^2-1)^{-1}]-4p_1p_2[P_1^1(\xi_2)Q_1^1(\xi_1)]^2\}; \quad (2\text{-}80а)$$
$$W_{(i)}^{сф\,(2)}=[Q_1^1(\xi_1)/P_1^1(\xi_1)]\{p_1[P_1^1(\xi_1)]^2[p_1P_1^1(\xi_1)Q_1^1(\xi_1)-0{,}5\times$$
$$\times(\xi_1^2-1)^{-1}]-p_2[P_1^1(\xi_2)]^2[p_2P_1^1(\xi_2)Q_{(1)}^1(\xi_2)-0{,}5\times$$
$$\times(\xi_2^2-1)^{-1}]\}/\{[p_1P_1^1(\xi_1)Q_1^1(\xi_1)-0{,}5(\xi_1^2-1)^{-1}]\times$$
$$\times[p_2P_1^1(\xi_2)Q_1^1(\xi_2)-0{,}5(\xi_2^2-1)^{-1}]-p_1p_2[P_1^1(\xi_2)Q_1^1(\xi_1)]^2\}. \quad (2\text{-}80б)$$

2. Сфероид сжатый (рис. 2-8). Для однородного магнитного поля напряженностью $\mathbf{H}^{(0)}$, направленной параллельно оси вращения, используя формулы (2-23) и данные табл. 2-1 при $n=1$, получим

$$Э_{\parallel}^{сф\,(2)}=(\xi_1^2+1)(\xi_2^2+1)\{[2p_1P_1(i\xi_1)Q_1(i\xi_1)+(\xi_1^2+1)^{-1}]\times$$
$$\times[2p_2P_1(i\xi_2)Q_1(i\xi_2)+(\xi_2^2+1)^{-1}]-4p_1p_2[P_1(i\xi_2)Q_1(i\xi_1)]^2\};$$
$$(2\text{-}81а)$$
$$W_{(i)}^{сф\,(2)}=[Q_1(i\xi_1)/P_1(i\xi_1)]\{p_1[P_1(i\xi_1)]^2[p_1P_1(i\xi_1)Q_1(i\xi_1)+0{,}5\times$$
$$\times(\xi_1^2+1)^{-1}]-p_2[P_1(i\xi_2)]^2[p_2P_1(i\xi_2)Q_1(i\xi_2)+0{,}5(\xi_2^2+$$
$$+1)^{-1}]\}/\{[p_1P_1(i\xi_1)Q_1(i\xi_1)+0{,}5(\xi_1^2+1)^{-1}][p_2P_1(i\xi_2)\times$$
$$\times Q_1(i\xi_2)+0{,}5(\xi_2^2+1)^{-1}]-p_1p_2[P_1(i\xi_2)Q_1(i\xi_1)]^2\}. \quad (2\text{-}81б)$$

Для магнитного поля напряженностью $\mathbf{H}^{(0)}$, направленной перпендикулярно оси вращения, при $n=1$ и $m=1$

$$Э_{\perp}^{сф\,(2)}=(\xi_1^2+1)(\xi_2^2+1)\{[2p_1P_1^1(i\xi_1)Q_1^1(i\xi_1)+(\xi_1^2+1)^{-1}]\times$$
$$\times[2p_2P_1^1(i\xi_2)Q_1^1(i\xi_2)+(\xi_2^2+1)^{-1}]-4p_1p_2[P_1^1(i\xi_2)Q_1^1(i\xi_1)]^2\};$$
$$(2\text{-}82а)$$
$$W_{(i)}^{сф\,(2)}=[Q_1^1(i\xi_1)/P_1^1(i\xi_1)]\{p_1[P_1^1(i\xi_1)]^2[p_1P_1^1(i\xi_1)Q_1^1(i\xi_1)+$$
$$+0{,}5(\xi_1^2+1)^{-1}]-p_2[P_1^1(i\xi_2)]^2[p_2P_1(i\xi_2)Q_1(i\xi_2)+0{,}5\times$$
$$\times(\xi_2^2+1)^{-1}]\}/\{[p_1P_1^1(i\xi_1)Q_1^1(i\xi_1)+0{,}5(\xi_1^2+1)^{-1}]\times$$
$$\times[p_2P_1^1(i\xi_2)Q_1^1(i\xi_2)+0{,}5(\xi_2^2+1)^{-1}]-p_1p_2[P_1^1(i\xi_2)Q_1^1(i\xi_1)]^2\}.$$
$$(2\text{-}82б)$$

Формулы для расчета эффективности экранирования сфероидальными оболочками и функцией обратного действия с бóльшим числом слоев ($\nu>2$) могут быть получены из выражений (2-24) — для трехслойных оболочек и из (2-21) — для многослойнык оболочек. Из-за громоздкости выражений они не приводятся.

Круговые цилиндрические оболочки.

Круговые толстостенные цилиндры. Используя общий метод расчета, приведенный в § 2-1, из формул (2-9) можно получить формулы для расчета экранирующих функций ν круговых цилиндрических оболочек. При этом для напряженностей однородных помехонесущих магнитных полей формулы (2-9) упрощаются.

Цилиндры однослойные.

Используя выражения (2-10), получим для расчета экранирующих функций (при перпендикулярном направлении напряженности однородного магнитного поля относительно оси z) в соответствии с рис. 2-9, где $\rho_3, \ldots, \rho_{2\nu} \to \infty$,

$$Э^{u(1)} = (\nu_{0,1}/4)\left[(\nu_{1,0}+1)^2 - p_{1,2}^2(\nu_{1,0}-1)^2\right]; \qquad (2\text{-}83а)$$

$$W_{(a)}^{u(1)} = -\frac{(\nu_{0,1}-1)^2\left(1-p_{1,2}^2\right)}{(\nu_{1,0}+1)^2 - p_{1,2}^2(\nu_{1,0}-1)^2}, \qquad (2\text{-}83б)$$

где $\nu_{\alpha,\beta} = \mu_\alpha/\mu_\beta$; $\rho_{\alpha,\beta} = \rho_\alpha/\rho_\beta$.

Из формулы (2-83а) следует, что магнитное поле за цилиндрическим экраном однородно и совпадает по направлению с помехонесущим.

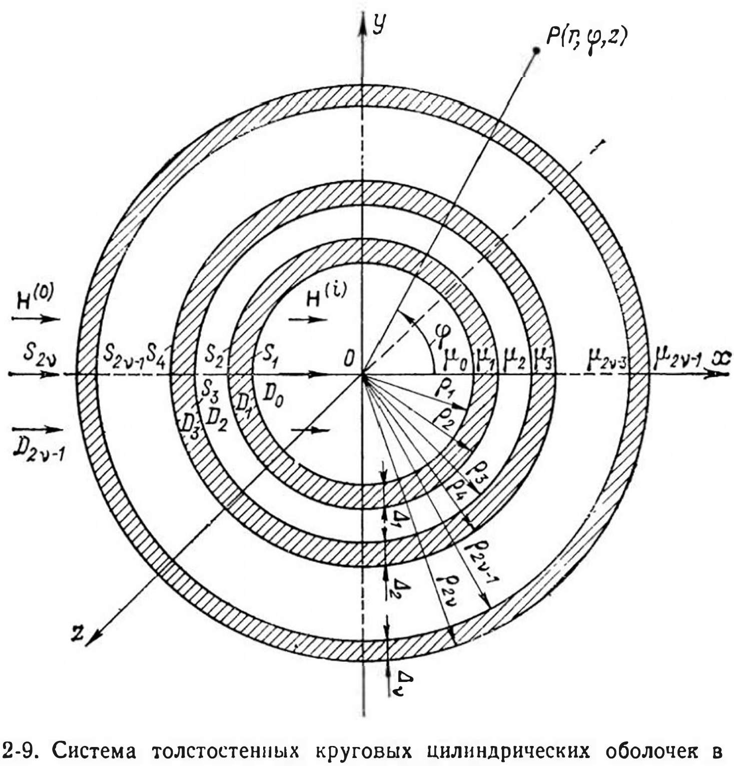


Рис. 2-9. Система толстостенных круговых цилиндрических оболочек в однородном магнитном поле

При $\mu_1 \gg \mu_0$ ($\nu_{1,0} \gg 1$), что соответствует реальным случаям, $W^{ц(1)}_{(a)} \to -1$. Разлагая в биномиальный ряд $(1 \pm \nu_{1,0})$ и отбрасывая слагаемые высших порядков, получим

$$Э^{ц(1)} = (\nu_{0,1}/4)\left[(1 + 2\nu_{1,0}) - p^2_{1,2}(1 - 2\nu_{1,0})\right]. \qquad (2\text{-}84)$$

Эффективность экранирования однослойным цилиндрическим экраном может быть выражена в виде

$$Э^{ц(1)} = \frac{(\nu_{1,0}+1)^2 - (\nu_{1,0}-1)^2 p^2_{1,2}}{(\nu_{1,0}+1)^2 - (\nu_{1,0}-1)^2} \approx (\rho_1 + \rho_2)(\nu_{1,0}\Delta_1 + \rho_1 + \rho_2)/(4\rho_2^2), \qquad (2\text{-}85)$$

где $\Delta_1 = \rho_2 - \rho_1$. Если допустить, что толщина экрана невелика, то $\rho_2 \approx \rho_1 \approx R$ (R — средний радиус оболочки). Тогда $\rho_2^2 - \rho_1^2 \approx \approx \Delta_1 2R$, откуда из выражения (2-85)

$$Э^{ц(1)} = 1 + [\Delta_1 \nu_{1,0}/(2R)], \qquad (2\text{-}86)$$

что соответствует уже известному выражению [10]. Считая $\nu_{1,0}(\rho_2 + \rho_1) \gg \Delta_1$, получим из (2-85)

$$Э^{ц(1)} \approx \Delta_1 \nu_{1,0}/(2R). \qquad (2\text{-}87)$$

Аналогичный результат получается из (2-86), если пренебречь первым членом (в практических случаях $\Delta\nu_{1,0}/(2R) \gg 1$).

Из формул (2-83а), (2-84) — (2-87) следует, что эффективность экранирования увеличивается при увеличении толщины оболочки Δ_1 и магнитной проницаемости материала μ_1, из которого она изготовлена.

Цилиндры двухслойные.

Используя формулы (2-11), получим для расчета эффективности экранирования двухслойным круговым цилиндрическим экраном выражение (рис. 2-9, где $\rho_5, \ldots, \rho_{2\nu} \to \infty$),

$$Э^{ц(2)} = \frac{1}{16}\nu_{1,0}\nu_{2,0}\{[(1 + \nu_{0,1})^2 - (1 - \nu_{0,1})^2 p^2_{1,2}][(1 + \nu_{0,2})^2 - \\ - (1 - \nu_{0,2})^2 p^2_{2,3}] - (1 - \nu^2_{0,1})(1 - \nu^2_{0,2})(1 - p^2_{1,2})(1 - p^2_{2,3})\},$$

$$p_{\alpha,\beta} = \rho_\alpha/\rho_\beta. \qquad (2\text{-}88)$$

Если $\nu_{\alpha,0} \gg 1$, $\Delta_\alpha/\rho_\alpha \ll 1$, $\alpha = 1, 2$, то

$$Э^{ц(2)} = 1 + \frac{1}{2}\nu_{1,0}\frac{\Delta_1}{\rho_1} + \frac{1}{2}\nu_{2,0}\frac{\Delta_2}{\rho_2} + \frac{1}{4}\frac{\nu_{1,0}\nu_{2,0}\Delta_1\Delta_2}{\rho_1\rho_2}(1 - p^2_{1,2}). \qquad (2\text{-}89)$$

Если $\mu_{1,0} = \mu_{2,0} = \nu_{1,0}$, то

$$Э^{ц(2)} = 1 + \frac{1}{2}\nu_{1,0}\left(\frac{\Delta_1}{\rho_1} + \frac{\Delta_2}{\rho_2}\right) + \frac{1}{4}\frac{\nu^2_{1,0}\Delta_1\Delta_2}{\rho_1\rho_2}(1 - p^2_{1,2}).$$

Формула (2-88) при $\mu_{1,0}=\mu_{2,0}=\nu_{1,0}$ может быть представлена в виде

$$Э^{ц(2)}=1+\frac{1}{4}\frac{(\nu_{1,0}-1)^2}{\nu_{1,0}}\left\{\left(1-p_{1,2}^2p_{3,4}^2\right)+\frac{(\nu_{1,0}+1)^2}{4\nu_{1,0}}m_{1,2}m_{2,3}m_{3,4}\right\}, \qquad (2\text{-}90)$$

где $p_{\alpha,\beta}=\rho_\alpha/\rho_\beta$; $m_{\alpha,\beta}=1-(\rho_\alpha/\rho_\beta)^2$.

Представляя эффективность экранирования однослойной оболочки в виде

$$Э_\alpha^{ц(1)}=1+\frac{1}{4}\frac{(\nu_{1,0}-1)^2}{\nu_{1,0}}(1-p_{1,2}),$$

получим

$$Э^{ц(2)}=Э_1^{ц(1)}Э_2^{ц(1)}-\frac{1}{16}\frac{\left(\nu_{1,0}^2-1\right)^2}{\nu_{1,0}^2}p_{2,3}m_{2,2}m_{3,4}. \qquad (2\text{-}91)$$

При $p_{2,3}\to 0$ второй член в выражении (2-91) исчезает, так как внешняя оболочка удаляется в бесконечность.

При $\mu_{1,0}\gg 1$

$$Э^{ц(2)}=Э_1^{ц(1)}Э_2^{ц(1)}-\frac{1}{16}\nu_{1,0}^2p_{2,3}m_{1,2}m_{3,4}. \qquad (2\text{-}92)$$

Для оболочек, толщина стенок которых $\Delta_\alpha\ll 0{,}01\rho_\alpha$, где ρ_α — средний радиус оболочек ($\alpha=1,\ 2$), $m_{\alpha,\beta}=2\Delta_\alpha/\rho_\alpha$.

Цилиндры многослойные.

Используя формулы (2-9), для эффективности экранирования трехслойным круговым цилиндрическим экраном получим (рис. 2-9)

$$\begin{aligned}Э^{ц(3)}=\frac{1}{16}\nu_{1,0}\nu_{2,0}\nu_{3,0}\{&[(1+\nu_{0,1})+(\nu_{0,2}+\nu_{0,1})-(1-\nu_{0,1})\times\\&\times(\nu_{0,2}-\nu_{0,1})p_{1,2}^2][(1+\nu_{0,3})(\nu_{0,2}+\nu_{0,3})-(1-\nu_{0,3})\times\\&\times(\nu_{0,2}-\nu_{0,3})p_{3,4}^2]-[(1+\nu_{0,1})(\nu_{0,2}-\nu_{0,1})-(1-\nu_{0,1})\times\\&\times(\nu_{0,2}+\nu_{0,1})p_{1,2}^2][(1-\nu_{0,3})(\nu_{0,2}-\nu_{0,3})-(1-\nu_{0,3})\times\\&\times(\nu_{0,2}+\nu_{0,3})p_{3,4}^2]p_{2,3}^2\},\quad p_{\alpha,\beta}=\rho_\alpha/\rho_\beta.\end{aligned} \qquad (2\text{-}93)$$

Для экрана типа Fe — Cu — Fe, когда средний слой немагнитный, выражение для $Э^{ц(3)}$ упрощается и соответствует (2-88), т. е. выражению для двухслойного экрана.

При расчете эффективности экранирования ν концентрическими экранами можно воспользоваться формулой (2-41):

$$Э^{ц\nu}=Э_1^{ц(1)}Э_2^{ц(1)}\left(1-p_{1,2}^2\right)Э_3^{ц(1)}\left(1-p_{2,3}^2\right)\ldots Э_\nu^{ц(1)}\left(1-p_{\nu-1,\nu}^2\right) \qquad (2\text{-}94)$$

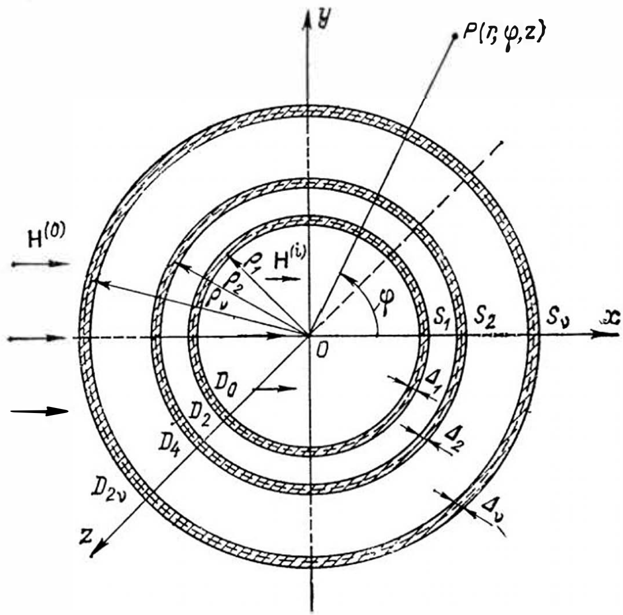


Рис. 2-10. Система тонкостенных круговых цилиндрических оболочек в однородном магнитном поле

или

$$Э^{цν} = \prod_{\alpha=1}^{\alpha=\nu} Э_\alpha^{ц(1)} \left(1 - p_{\alpha-1,\alpha}^2\right), \tag{2-95}$$

где $p_{\alpha-1,\alpha} = \rho_{\alpha-1}/\rho_\alpha$.

Круговые тонкостенные цилиндры. Используя общий метод расчета, приведенный в § 2-1, из формул (2-21) могут быть получены формулы для расчета экранирующих функций ν тонкостенных оболочек при падении на них однородных магнитных полей. В формуле для расчета эффективности экранирования сохраняется лишь одна гармоника. Для упрощения записи нижние индексы опускаются.

Цилиндры однослойные.

Из формул (2-22) в соответствии с рис. 2-10, где $\rho_2, \ldots$ $\ldots, \rho_\nu \to \infty$, получим

$$Э^{ц(1)} = 1 + 2p_1\rho_1^{-1} I_1(\rho_1) K_1(\rho_1); \tag{2-96а}$$

$$W_{(a)}^{ц(1)} = -\frac{2\left[p_1 I_1^2(\rho_1)\rho_1^{-1} + I_1'^2(\rho_1)\rho_1^3\right]\left[K_1(\rho_1)/I_1(\rho_1)\right]}{1 + 2p_1\rho_1^{-1} I_1(\rho_1) K_1(\rho_1)}. \tag{2-96б}$$

Если учесть, что $I_1(\rho_1) K_1(\rho_1) \approx 0{,}5$, то приходим к формуле (2-86).

Цилиндры двухслойные.

Из формул (2-23) в соответствии с рис. 2-10, где $\rho_3, \ldots$ $\ldots, \rho_\nu \to \infty$,

$$Э^{ц(2)} = \rho_1^{-1}\rho_2^{-1}\{[2p_1 I_1(\rho_1) K_1(\rho_1) + \rho_1][2p_2 I_1(\rho_2) K_1(\rho_2) + \rho_2] - - 4p_1 p_2 I_1^2(\rho_2) K_1^2(\rho_2)\}; \qquad (2\text{-}97а)$$

$$W_{(a)}^{ц(2)} = \{2[K_1(\rho_1)/I_1(\rho_1)]\{p_1 I_1^2(\rho_1)\rho_1^{-1}[2p_2\rho_2^{-1}I_1(\rho_2) \times \times K_1(\rho_2) + 1] - p_2 I_1^2(\rho_2)\rho_2^{-1}[2p_1 I_1(\rho_1) K_1(\rho_1)\rho_1^{-1} + 1]\}\} \times \times \{[2p_1\rho_1^{-1}I_1(\rho_1) K_1(\rho_1) + 1][2p_2\rho_2^{-1}I_1(\rho_2) K_1(\rho_2) + 1] - - 4\rho_1^{-1}\rho_2^{-1}p_1 p_2 I_1^2(\rho_2) K_1^2(\rho_2)\}^{-1}. \qquad (2\text{-}97б)$$

Формула (2-97а) соответствует (2-89) при условии $\nu_{j,0} \gg 1$, $p_{1,2}^2 \to 0$ (большое расстояние между оболочками).

Цилиндры многослойные.

Они могут быть рассчитаны по формулам (2-21) в соответствии с рис. 2-10. Из-за громоздкости выражений формулы для расчета эффективности экранирования оболочками с $\nu > 2$ не приводятся. Могут быть использованы также формулы (2-94) с учетом (2-96а) для расчета эффективности экранирования каждой из ν оболочек.

Осесимметричные оболочки. Рассмотрим ферромагнитные оболочки, ограниченные поверхностями второго порядка. Известно, что бесконечно длинный круговой цилиндр и сфера могут рассматриваться как тела, образованные из вытянутого эллипсоида (рис. 2-11).

Бесконечно длинный цилиндр получается при неограниченном возрастании большой оси эллипсоида вращения $2c$, совпадающей с осью симметрии. При уменьшении большой оси $2c$ до размеров малой оси $2a$ вытянутый эллипсоид преобразуется в сферу. При дальнейшем уменьшении оси $2c$, когда $c < a$, получается сжатый эллипсоид. При $c \to 0$ сжатый эллипсоид вырождается в круглый диск. При преобразовании формы вытянутого эллипсоида его максимальная толщина Δ_{max} и малая

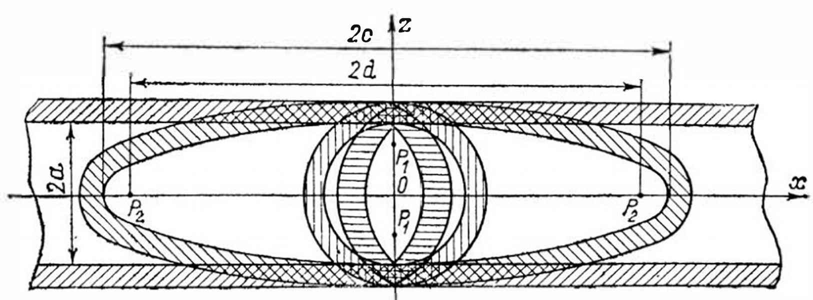


Рис. 2-11. Осесимметричные оболочки в однородном магнитном поле

полуось a не меняются, а большая полуось c и фокусное расстояние $2d$ меняются, что и приводит к изменению отношения c/a.

Для тонкостенных оболочек в форме вытянутого эллипсоида справедливо соотношение $\Delta_{min}/\Delta_{max} = a/c$. Можно в первом приближении получить единую структурную формулу для эффективности экранирования осесимметричными оболочками: бесконечно длинными круговыми цилиндрическими, вытянутыми и сжатыми эллипсоидальными, сферическими, в виде [19]

$$Э^{s\,(1)} = A\,[\nu_{1,0}\delta_1/(\nu_{1,0}\delta_1 + B)], \tag{2-98}$$

где A — коэффициент линейных размеров и формы оболочки; B — коэффициент формы оболочки; δ_1 — универсальная толщина оболочки ($\delta_1 = \Delta_{max}/a$); индекс «$s$» обозначает вид оболочки.

Значения коэффициентов A и B для осесимметричных оболочек различной формы приведены в табл. 2-3, где a, c — полу-

Таблица 2-3

Форма оболочки	Направление напряженности относительно оси вращения	δ_1	A	B
Бесконечно длинный цилиндр: круглый	Перпендикулярное	$\frac{\Delta_{max}}{a} = \Delta_1/R_1$	c	2
эллиптический		$\frac{\Delta_{max}}{a}$	a	a/c
Сфероид: вытянутый	Перпендикулярное	$\frac{\Delta_{min}}{d_1}$	$d_1 P_1^{(1)}(\xi_2)$	$-\{2cd_1/[a^2 Q_1^1(\xi_2) \times P_1^1(\xi_2)]\}\,\eta_1$
	Параллельное		$d_1\xi_2$	$cd_1/[2a^2 Q_1(\xi_2)]$
сжатый	Перпендикулярное	$\frac{\Delta_{max}}{d_2}$	$i^{-1} d_2 P_1^1(i\xi_2)$	$\frac{(\xi_2^2+1)^2 cd^2}{(2\xi_2^2+1)a^2}\,\zeta_1$
	Параллельное		$i^{-1} d_2 P_1(i\xi_2)$	$\frac{(\xi_2^2+1)^2 cd_2}{2a^2}\,\zeta_2$
Сфера	—	$\frac{\Delta_1}{R_1}$	c	1,5

оси эллипсоида; $2d_f$ — фокусное расстояние; ξ_2 — координата поверхности эллипсоидов;

$$\eta_1 = (\xi_2^2 - 1)/(2\xi_2^2 - 1); \quad \zeta_1 = [Q_1^1(i\xi_2) P_1^{1\prime}(i\xi_2) - Q_1^{1\prime}(i\xi_2) P_1^1(i\xi_2)]/[Q_1^1(i\xi_2) P_1^1(i\xi_2)].$$

Формула (2-98) для расчета $Э^{s(1)}$ применима для магнитного поля напряженностью, направленной перпендикулярно оси цилиндра и параллельно. Для каждого из этих случаев у эллипсоидов даются по два значения коэффициентов A и B.

Из табл. 2-3 следует, что при изменении соотношения полуосей c/a оболочки в форме вытянутого эллипсоида коэффициент B изменяется от 2 (бесконечно длинный круговой цилиндр) до 1,5 (сфера). Как показывают расчеты, при $3 \leqslant (c/a) < 10$ значение коэффициента B с достаточной для инженерной практики точностью можно принимать равным 1,75: для $c/a \geqslant 10$ — $B = 2{,}0$.

Эффективность экранирования осесимметричными оболочками по отношению к помехонесущим магнитным полям, напряженность которых перпендикулярна продольной оси, можно представить в виде

$$Э^{s(1)} = 1 + \nu_{1,0}\delta_1\zeta. \tag{2-99}$$

Результаты расчетов для ζ, используемых в (2-99), представлены в табл. 2-4 [19].

Таблица 2-4

Форма оболочки	c/a	ζ
Сфероид:		
сжатый	0,2	3,17
	0,33	1,82
	0,5	1,02
вытянутый	3	0,575
	5	0,535
	7	0,527
	10	0,517
Сфера	1	0,667
Бесконечно длинный круговой цилиндр	∞	0,500

Единая структурная формула для расчета эффективности экранирования осесимметричными оболочками, ограниченными поверхностями второго порядка, позволяет сократить и упростить расчеты.

Эллиптические цилиндрические оболочки. Формально экранирующие функции эллиптической цилиндрической оболочки

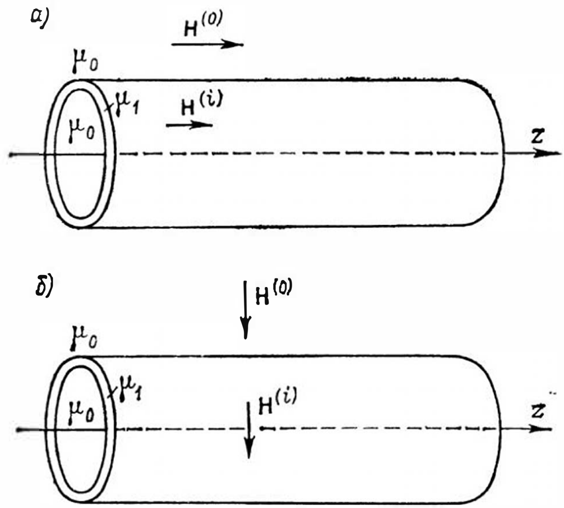


Рис. 2-12. Эллиптический цилиндр в однородном магнитном поле

могут быть получены из выражений (2-10) — для толстостенных оболочек и из (2-22) — для тонкостенных оболочек. В качестве специальных функций используются присоединенные функции Матье [в координатах (ξ, φ, z)] целого порядка первого рода:

$$P_{nm}(q_1) = \mathrm{Ce}_0(\xi, q); \quad F_{nm}(q_1) = \mathrm{Se}_1(\xi, q),$$

где $q = p^2/4$; $p^2 = (k^2 - \mu^2)a^2$; a — масштабный коэффициент; k, μ — собственные числа задачи. Однако получаемые при этом формулы, включающие в себя функции Матье, будут громоздкими, а поэтому, исходя из требований практики, используем экранирующие функции, полученные в работах [12, 20].

Эллиптический цилиндр в продольном магнитном поле. Эффективность экранирования $Э_{\|}^{э.ц(1)}$ эллиптическим цилиндром, находящимся в продольном магнитном поле (рис. 2-12, a), определяется в виде

$$Э_{\|}^{э.ц(1)} \frac{(\nu_{1,0}^2 + \varepsilon_2)(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \nu_{1,0}(1 + \varepsilon_2)(1 - \varepsilon_1\varepsilon_2)}{\nu_{1,0}(1 + \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2^2)}, \quad (2\text{-}100)$$

где $\nu_{1,0} = \mu_1/\mu_0$; $\varepsilon_j = b_j/a_j = \sqrt{1 - (d/a_j)^2}$; μ_0 и μ_1 — магнитная проницаемость среды и материала оболочки; a_j, b_j $(j = 1, 2)$ — полуоси эллипсов; d — половина фокусного расстояния системы граничных эллипсов (эллипсы софокусные).

Из анализа выражения (2-100) следует:

1) $Э_{\|}^{э.ц(1)} > 1$ для всех ε_j и $\nu_{1,0}$; таким образом, при продольном намагничивании всегда имеет место эффект магнитного экранирования;

2) при $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$ $Э_{\parallel}^{э.ц(1)} = 1$; эллиптическая цилиндрическая оболочка не экранирует;

3) при увеличении $\nu_{1,0}$ эффективность экранирования увеличивается;

4) при $\nu_{1,0} \in [50 \ldots 100]$ эффективность $Э_{\parallel}^{э.ц(1)} \in [7 \ldots 20]$ получена уже при $\varepsilon_2 = 0{,}8$, поэтому не следует брать более толстые стенки.

Эллиптический цилиндр в перпендикулярном оси магнитном поле. Эффективность экранирования эллиптическим цилиндром, находящимся в перпендикулярном магнитном поле (рис. 2-12, *б*),

$$Э_{\perp}^{э.ц(1)} = \frac{\left(\nu_{1,0}^2 \varepsilon_2 + 1\right)(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \nu_{1,0}(1 + \varepsilon_2)(1 - \varepsilon_1\varepsilon_2)}{\nu_{1,0}(1 + \varepsilon_1)\left(1 - \varepsilon_2^2\right)}. \quad (2\text{-}101)$$

Анализируя формулы (2-100) и (2-101), можно показать [12], что толстостенный ферромагнитный цилиндр не всегда экранирует. В отдельных случаях напряженность поля внутри полости может оказаться сильнее, чем первичное поле напряженностью $\mathbf{H}^{(0)}$, в которое внесен цилиндр. Этот эффект «обратного экранирования» наблюдается только тогда, когда первичное поле направлено перпендикулярно направлению вытянутости цилиндра.

Из анализа выражения (2-101) следует:

1) в интервале $\varepsilon_2 \approx 0$ и $\varepsilon_2 = \nu_{1,0}^{-1}$ эффективность экранирования $Э_{\perp}^{э.ц(1)} < 1$;

2) начиная с $\varepsilon_2 = \nu_{1,0}^{-1}$ и выше появляется эффект экранирования, тем бо́льший, чем выше магнитная проницаемость материала цилиндра;

3) с утоньшением оболочки $\varepsilon_2 \to \varepsilon_1$ эффект экранирования уменьшается до $Э_{\perp}^{э.ц(1)} = 1$.

Плоские оболочки.

Пластины толстостенные. Используя общий метод расчета, изложенный в § 2-1, из формул (2-9) можно получить формулы для расчета экранирующих функций плоских толстостенных оболочек. Их можно рассматривать как приближенные, так как точные формулы выписываются в интегралах, что не всегда удобно при инженерных расчетах.

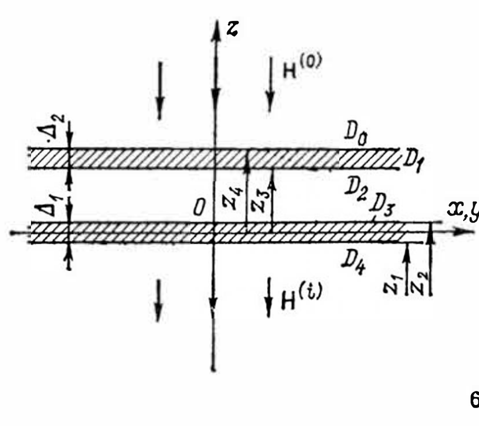


Рис. 2-13. Система параллельных пластин в однородном магнитном поле

Пластины однослойные.

Используя формулы (2-10) и данные табл. 2-1, получим (рис. 2-13, где z_3, $z_4 \to \infty$)

$$Э^{п(1)} \approx \frac{\nu_{0,1}}{4}\left[(\nu_{1,0}+1)^2-(\nu_{1,0}-1)^2\exp\left(-2\sqrt{2}\,\Delta_1\right)\right]; \quad (2\text{-}102а)$$

$$W_{(a)}^{п(1)} \approx -\frac{\left(\nu_{1,0}^2-1\right)\left[1-\exp\left(-2\sqrt{2}\,\Delta_1\right)\right]\exp\left(-2\sqrt{2}\,z_1\right)}{(\nu_{1,0}+1)^2-(\nu_{1,0}-1)^2\exp\left(-2\sqrt{2}\,\Delta_1\right)}, \quad (2\text{-}102б)$$

где z_1, z_2 — координаты сторон плоской пластины; $\nu_{\alpha,\beta}=\mu_\alpha/\mu_\beta$; $\Delta_1=z_2-z_1$ — толщина пластины.

Пластины двухслойные.

Используя формулы (2-12) — (2-13) и данные табл. 2-1, получим (рис. 2-13)

$$Э^{п(2)} \approx (16\nu_{1,0}\nu_{2,0})^{-1}\left\{\left[(\nu_{1,0}+1)^2-(\nu_{1,0}-1)^2\exp\left(-2\sqrt{2}\,\Delta_1\right)\right]\times\right.$$
$$\times\left[(1+\nu_{2,0})^2-(\nu_{2,0}-1)^2\exp\left(-2\sqrt{2}\,\Delta_2\right)\right]+\left(\nu_{1,0}^2-1\right)\left(\nu_{2,0}^2-1\right)\times$$
$$\left.\times\left[1-\exp\left(-2\sqrt{2}\,\Delta_2\right)\right]\left[1-\exp\left(-2\sqrt{2}\,\Delta_1\right)\right]\exp\left(-2\sqrt{2}\,z_{32}\right)\right\}; \quad (2\text{-}103а)$$

$$W_{(a)}^{п(2)} \approx -\left\{\left\{\left[(\nu_{1,0}+1)^2-(\nu_{1,0}-1)^2\exp\left(-2\sqrt{2}\,\Delta_1\right)\right]\left(\nu_{2,0}^2-1\right)\times\right.\right.$$
$$\times\left[1-\exp\left(-2\sqrt{2}\,z_{32}\right)\right]-\left[(\nu_{2,0}+1)^2-(\nu_{2,0}-1)^2\times\right.$$
$$\left.\times\exp\left(-2\sqrt{2}\,\Delta_1\right)\right]\left(\nu_{1,0}^2-1\right)\left[1-\exp\left(-2\sqrt{2}\,z_{32}\right)\right]\Big\}\times$$
$$\times\exp\left(-2\sqrt{2}\,z_1\right)\Big\}\Big\{\left[(\nu_{1,0}+1)^2-(\nu_{1,0}-1)^2\exp\left(-2\sqrt{2}\,\Delta_1\right)\right]\times$$
$$\times\left[(\nu_{2,0}+1)^2-(\nu_{2,0}-1)^2\exp\left(-2\sqrt{2}\,\Delta_2\right)\right]+\left(\nu_{1,0}^2-1\right)\left(\nu_{2,0}^2-1\right)\times$$
$$\times\left[1-\exp\left(-2\sqrt{2}\,\Delta_2\right)\right]\left[1-\exp\left(-2\sqrt{2}\,\Delta_1\right)\right]\exp\left(-2\sqrt{2}\,z_{32}\right)\Big\}^{-1}, \quad (2\text{-}103б)$$

где Δ_j $(j=1,2)$ — толщина плоских оболочек; z_{32} — расстояние между пластинами.

Второй член в фигурных скобках (2-103а) учитывает взаимовлияние оболочек, первый — представляет собой произведение эффективностей экранирования двумя оболочками. Если удалять внешнюю оболочку в бесконечность, тем самым ослабляя их взаимовлияние, то при $z_{32}\to\infty$, $\exp\left(-2\sqrt{2}\,z_{32}\right)\to 0$ формула (2-103а) перейдет в выражение

$$Э^{п(2)} = Э_1^{п(1)}Э_2^{п(1)},$$

где

$$Э_j^{п(1)} \approx \frac{\nu_{0,j}}{4}\left[(\nu_{j,0}+1)^2-(\nu_{j,0}-1)^2\exp\left(-2\sqrt{2}\,\Delta_j\right)\right], \quad j=1,\ 2.$$

При $\lambda=1$ и $\beta=1$ $(a=\sqrt{2})$ можем получить из (2-9) экранирующие функции для ν параллельных пластин.

Пластины тонкостенные. Используя общий метод расчета, представленный в § 2-1, из формул (2-21) можно получить экранирующие функции тонкостенных плоских оболочек. Они, как и для толстостенных оболочек, должны рассматриваться лишь в качестве приближенных.

Пластины однослойные.

Используя формулы (2-22) и данные табл. 2-1, получим

$$Э^{п\,(1)} = 1 + \sqrt{2}\,p_1; \tag{2-104а}$$

$$W_{(a)}^{п\,(1)} = -\sqrt{2}\,p_1 \exp(-2\sqrt{2}\,z_1)/(1 + \sqrt{2}\,p_1), \tag{2-104б}$$

где $p_1 = \mu\Delta_1/(2\mu_0) = \nu_{1,\,0}(\Delta_1/2)$; z_1 — средняя координата пластины.

Пластины двухслойные.

Используя формулы (2-23) и данные табл. 2-1, получим

$$Э^{п\,(2)} = 1 + \sqrt{2}\,(p_1 + p_2) + 2p_1p_2\{1 - \exp[-2\sqrt{2}\,(z_2 - z_1)]\}; \tag{2-105а}$$

$$W_{(a)}^{п\,(2)} = -\{(1 - p_1\sqrt{2})\sqrt{2}\,p_2 \exp[-2\sqrt{2}\,(z_2 - z_1)] + (1 + \sqrt{2}\,p_2)\sqrt{2}\,p_1\}\{1 + \sqrt{2}\,(p_1 + p_2) + 2p_1p_2\{1 - \exp[-2\sqrt{2}\,(z_2 - z_1)]\}\}^{-1}, \tag{2-105б}$$

где $p_j = \mu_j\Delta_j/(2\mu_0)$, $j = 1,\ 2$; z_1, z_2 — средние координаты пластин.

При $\lambda = 1$ и $\beta = 1\,(a = \sqrt{2})$ можем получить из (2-21) экранирующие функции для ν оболочек.

Формулы (2-104) — (2-105) могут быть получены непосредственно из (2-102) — (2-103), если положить $\Delta_j \to 0$ и $\nu_{j,\,0} \gg 1$.

Оболочки с концентрическим ферромагнитным включением. Рассмотрим вопрос о том, как необходимо преобразовать формулы для расчета эффективности экранирования однослойными оболочками, если во внутренней (экранированной) области находится ферромагнитное тело. Такие случаи имеют место в инженерной практике: катушки с магнитопроводами в экранирующей оболочке (в том числе и трансформаторы), ферромагнитные массы в экранированном помещении, несколько концентрических экранирующих оболочек и т. д.

Поле в экранированном пространстве при наличии тела уже не будет однородным. Ферромагнитное тело будет воздействовать на поле в окружающем его воздушном пространстве. Такое воздействие можно оценить, если заменить тело произвольной формы эквивалентным по массе телом, ограниченным поверхностью, аналогичной той, которой ограничена экранирующая оболочка. Результирующий экранирующий эффект оболочки с металлическим включением будет существенно отличаться от эффективности экранирования оболочкой без тела: он будет уменьшен.

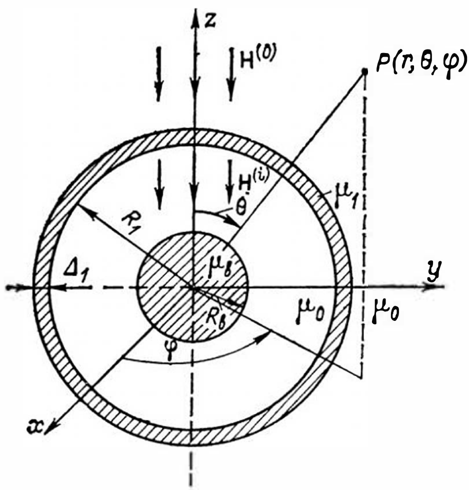


Рис. 2-14. Сферический экран со сплошным концентрическим металлическим включением в однородном магнитном поле

Сфера полая с ферромагнитным включением. На основании работы [10] и рис. 2-14 получим

$$Э_в^{с(1)} \approx 1 + \frac{2}{3} \nu_{1,0} (\Delta_1/R_1) \times \left[1 - \frac{(\nu_{в,0} - 1) p_{в,1}^3}{\nu_{в,0} + 2}\right], \tag{2-106}$$

где $\nu_{в,0} = \mu_в/\mu_0$; $p_{в,1} = R_в/R_1$.

При $R_в \to 0$, $p_{в,1} \to 0$ и выражение (2-106) стремится к (2-29). Если металлическое включение в сферу не является сферическим, то все равно его можно заменить сферическим с радиусом $R_в = \left[V_в/\left(\frac{4}{3}\pi\right)\right]^{1/3}$, где $V_в$ — объем металлического тела.

Полый цилиндр с концентрическим металлическим включением. В соответствии с обозначениями рис. 2-15 получим

$$Э_в^{ц(1)} = 1 + \frac{1}{2}\left[(\nu_{1,0} - 1)^2/\nu_{1,0}\right](\Delta_1/R_1)\left[1 - \frac{\nu_{в,0} p_{в,1}^2}{\nu_{в,0} + 2}\right]. \tag{2-107}$$

При $R_в \to 0$, $p_{в,1} \to 0$ и выражение (2-107) стремится к (2-86). При выводе (2-107) предполагалось, что металлическое включение — круговой цилиндр. Если включение отличается по форме от цилиндра, то оно может быть заменено цилиндром с эквивалентным радиусом $R_в = \sqrt{S/\pi}$, где S — площадь поперечного сечения включения.

Аналогично могут быть рассчитаны эффективности экранирования

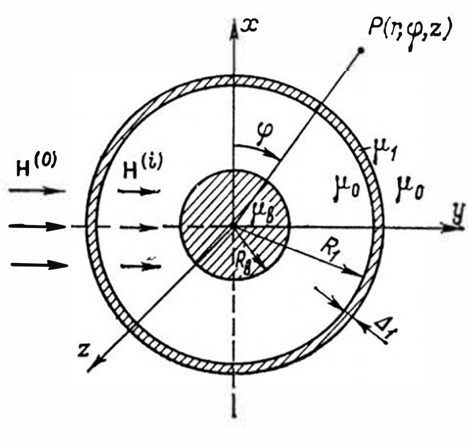


Рис. 2-15. Круговой цилиндрический экран со сплошным концентрическим включением в однородном магнитном поле

оболочками, имеющими поверхность различной формы. Во всех случаях в режиме магнитостатики эффективность экранирования при внесении в полость экрана ферромагнитного тела будет уменьшаться, с чем следует считаться при проектирования ферромагнитных экранов.

2-3. НЕОДНОРОДНЫЕ ПОЛЯ

Сферические оболочки.

Сферы толстостенные. Используя общий метод расчета, изложенный в § 2-1, из формул (2-9) можно получить формулы для экранирующих функций ν сферических толстостенных оболочек при произвольном виде помехонесущего магнитного поля. Как уже отмечено, эффективность экранирования и функции обратного действия получены в записи по гармоникам. Для сферических оболочек индекс m при записи не используется из-за круговой симметрии.

Сферы однослойные.

Используя формулы (2-10) и данные табл. 2-1, получим (рис. 2-16, где R_3, $R_4 \to \infty$)

$$Э_n^{c\,(1)} = [\nu_{1,0}(2n+1)^2]^{-1}\{[\nu_{1,0}(n+1)+n](\nu_{1,0}n+n+1) - n(n+1)(\nu_{1,0}-1)^2 p_{1,2}^{2n+1}\}; \quad (2\text{-}108а)$$

$$W_{n\,(i)}^{c\,(1)} = -\left[(n+1)(\nu_{1,0}-1)\left(1-p_{1,2}^{2n+1}\right)(\nu_{1,0}n+n+1)\right] \times \{[\nu_{1,0}(n+1)+n](\nu_{1,0}n+n+1) - n(n+1) \times (\nu_{1,0}-1)^2 p_{1,2}^{2n+1}\}^{-1}, \quad (2\text{-}108б)$$

где $\nu_{1,0} = \mu_1/\mu_0$; $p_{1,2} = R_1/R_2$; R_1 и R_2 — внутренний и наружный радиусы сферы; $n \in [1;\ \infty]$ — параметр.

Если $\nu_{1,0} \gg 1$, то

$$Э_n^{c\,(1)} = [n/(2n+1)^2] \times \{[\nu_{1,0}(n+1)+n] - (n+1)\nu_{1,0}p_{1,2}^{2n+1}\}; \quad (2\text{-}109а)$$

$$W_{n\,(i)}^{c\,(1)} = (n+1)\,\nu_{1,0}(1-p_{1,2}^{2n+1} \times \{[\nu_{1,0}(n+1)+n] - (n+1)\,\nu_{1,0}\,p_{1,2}^{2n+1}\}. \quad (2\text{-}109б)$$

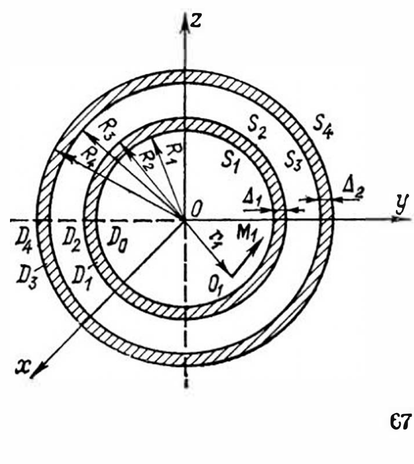


Рис. 2-16. Система толстостенных сфер в дипольном магнитном поле

Вместо выражения (2-108) можно записать

$$Э_n^{c(1)} = 1 + [n(n+1)/(2n+1)^2](\nu_{1,0} - 1)^2(1 - p_{1,2}^{2n+1}); \qquad (2\text{-}110\text{а})$$

$$W_{n(i)}^{c(1)} = -\frac{n(n+1)}{(2n+1)^2}\left(Э_n^{c(1)}\right)^{-1}(\nu_{1,0} - 1)(1 - p_{1,2}^{2n+1})\left(1 + \frac{n+1}{n\nu_{1,0}}\right); \qquad (2\text{-}110\text{б})$$

$$W_{n(a)}^{c(1)} = -\frac{n(n+1)}{(2n+1)^2}\left(Э_n^{c(1)}\right)^{-1}(\nu_{1,0} - 1)(1 - p_{1,2}^{2n+1})\left(1 + \frac{n}{(n+1)\nu_{1,0}}\right), \qquad (2\text{-}110\text{в})$$

где $p_{1,2} = R_1/R_2$. При $n \to \infty$ $Э_n^{c(1)}$ увеличивается, достигая предельного значения:

$$\lim_{n\to\infty} Э_n^{c(1)} = \frac{(1+\nu_{1,0})^2}{4\nu_{1,0}}.$$

Сферы двухслойные.

Используя формулы (2-11) и данные табл. 2-1, получим (рис. 2-16):

$$Э_n^{c(2)} = (2n+1)^{-4}\{\{[n + \nu_{2,0}(n+1)][(n+1) + \nu_{2,0}n] - n(n+1)(\nu_{2,0} - 1)^2 p_{3,4}^{2n+1}\}\{[(n+1) + \nu_{1,0}n] \times [n + \nu_{1,0}(n+1)] - n(n+1)(\nu_{1,0} - 1)^2 p_{1,2}^{2n+1}\} - p_{2,3}^{2n+1}(n+1)(\nu_{1,0} - 1)(\nu_{2,0} - 1)[(n+1) + \nu_{1,0}n] \times [n + \nu_{2,0}(n+1)](1 - p_{1,2}^{2n+1})(1 - p_{3,4}^{2n+1})\}; \qquad (2\text{-}111\text{а})$$

$$W_{n(i)}^{c(1)} = -\{n(\nu_{1,0} - 1)[n + \nu_{1,0}(n+1)]\{[n + \nu_{2,0}(n+1)] \times [(n+1) + \nu_{2,0}n] - n(n+1)(\nu_{2,0} - 1)^2 p_{3,4}^{2n+1}\}(1 - p_{1,2}^{2n+1}) + n(\nu_{2,0} - 1)p_{3,1}^{2n+1}[n + \nu_{2,0}(n+1)](1 - p_{3,4}^{2n+1}) \times \{[n + \nu_{1,0}(n+1)][(n+1) - \nu_{1,0}n] - (\nu_{1,0} - 1)^2 n(n+1) p_{1,2}^{2n+1}\}\}\{\{[n + \nu_{2,0}(n+1)] \times [(n+1) + \nu_{2,0}n] - n(n+1)(\nu_{2,0} - 1)^2 p_{3,4}^{2n+1}\} \times \{[(n+1) + \nu_{1,0}n][n + \nu_{1,0}(n+1)] - n(n+1)(\nu_{1,0} - 1)^2 p_{1,2}^{2n+1}\} - p_{2,3}^{2n+1}(n+1)(\nu_{1,0} - 1)(\nu_{2,0} - 1)[(n+1) + \nu_{1,0}n] \times [n + \nu_{2,0}(n+1)](1 - p_{1,2}^{2n+1})(1 - p_{3,4}^{2n+1})\}^{-1}, \qquad (2\text{-}111\text{б})$$

где $p_{\alpha,\beta} = R_\alpha/R_\beta$; $\nu_{\alpha,\beta} = \mu_\alpha/\mu_\beta$. Формулы (2-111) можно упростить, если положить $\nu_{1,0} \gg 1$, $j = 1, 2$.

Сферы тонкостенные. Используя общий метод расчета, приведенный в § 2-1, из формул (2-21) могут быть получены формулы для экранирующих функций ν тонкостенных оболочек при падении на них неоднородных магнитных полей.

Сферы однослойные.

Из формул (2-22) получим (рис. 2-17, где $R_2 \to \infty$)

$$Э_n^{c\,(1)} = 1 + 2\,(p_1/R_1)\,\frac{n\,(n+1)}{2n+1}; \qquad (2\text{-}112а)$$

$$W_{n\,(i)}^{c\,(1)} = -\,\frac{2\,(p_1/R_1)\,n\,(n+1)}{(2n+1) + 2\,(p_1/R_1)\,n\,(n+1)}, \qquad (2\text{-}112б)$$

где R_1 — средний радиус сферы; $p_1 = \nu_{1,0}\Delta_1/2$.

Аналогичные результаты получаются, если воспользоваться для расчета формулами (2-10), но положить $R_2 = R_1 + \Delta_1$. Тогда, исключив члены второго и более высокого порядков, получим

$$Э_n^{(1)} = [\alpha_1\nu_{1,0}(N+1)^2]^{-1}\,[(N\nu_{1,0}+1)(N+\nu_{1,0})\,\alpha_1 - N\alpha_2(\nu_{1,0}-1)^2], \qquad (2\text{-}113)$$

где $N = (n+1)/n$; $\alpha_j = R_j^{-(2n+1)}$, $j = 1,\ 2$. Если положить $R_1 \approx R_2$, то

$$Э_n^{c\,(1)} = [\nu_{1,0}(2n+1)]^{-1}\,[(2n+1)\,\nu_{1,0} + n\,(n+1)\,(\nu_{1,0}-1)^2\,(\Delta_1/R_1)].$$

Если $\mu_1 \gg \mu_0$ ($\nu_{1,0} \gg 1$), то $Э^{c\,(1)}$ соответствует выражению (2-112а).

Сферы двухслойные.

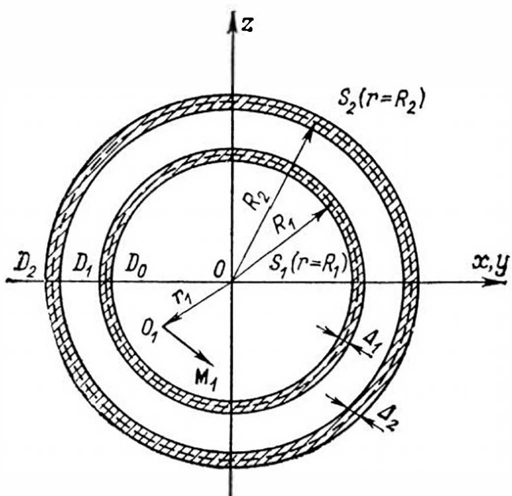


Рис. 2-17 Система тонкостенных сфер в дипольном магнитном поле

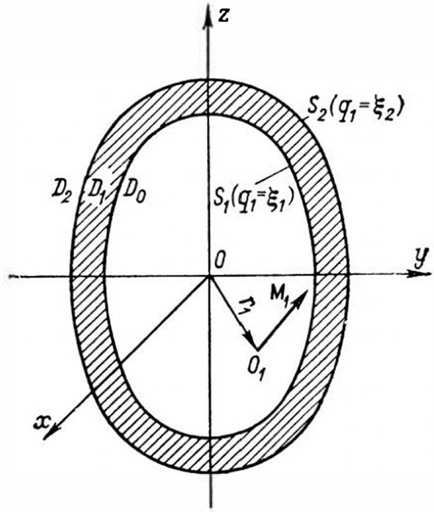


Рис. 2-18. Вытянутый толстостенный сфероид в дипольном магнитном поле

Из формул (2-23) получим (рис. 2-17)

$$Э_n^{c\,(2)} = \left(1 + \frac{h_n^{(1)}}{R_1}\right)\left(1 + \frac{h_n^{(2)}}{R_2}\right) - h_n^{(1)} h_n^{(2)} \left(R_1^{2n}/R_2^{2n+2}\right); \quad (2\text{-}114а)$$

$$W_{n\,(i)}^{c\,(2)} = \frac{h_n^{(1)}\left(1 - \frac{h_n^{(2)}}{R_2}\right) R_1^{-2n-2} + h_n^{(2)}\left(1 - \frac{h_n^{(1)}}{R_1}\right) R_2^{-2n-2}}{\left(1 + \frac{h_n^{(1)}}{R_1}\right)\left(1 + \frac{h_n^{(2)}}{R_2}\right) - h_n^{(1)} h_n^{(2)} \left(R_1^{2n}/R_2^{2n+2}\right)}, \quad (2\text{-}114б)$$

где $h_n^{(j)} = [2n\,(n+1)/(2n+1)]\,p_j$.

Сфероидальные оболочки.

Сфероиды толстостенные. Если сфероидальные оболочки находятся в неоднородном магнитном поле, например в поле, созданном обмоткой, обтекаемой постоянным током, магнитный потенциал которого выражается рядом по основным гармоническим функциям сфероидальных оболочек, то рассчитывается эффективность экранирования для каждого члена гармонического ряда.

Используя общий метод расчета (см. § 2-1), из (2-9) можно получить формулы для расчета эффективности экранирования и функций обратного действия ν конфокальными сфероидальными оболочками.

Сфероиды однослойные.

1. Вытянутый сфероид (рис. 2-18). Для неоднородного магнитного поля, используя (2-10) и данные из табл. 2-1, получим

$$Э^{сф(1)}_{n,m} = \frac{(n-m)!^2}{\nu_{1,0}(n+m)!^2}\left\{\left[(\nu_{1,0}-1)^2 P_n^m(\xi_1) P_n^{m'}(\xi_1) Q_n^m(\xi_2)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times Q_n^{m'}(\xi_2) - B\right](\xi_1^2-1)(\xi_2^2-1)\right\}; \qquad (2\text{-}115а)$$

$$W^{сф(1)}_{n,m(i)} = (\nu_{1,0}-1)\left\{\nu_{1,0} Q_n^m(\xi_1) Q_n^m(\xi_2)\left[Q_n^{m'}(\xi_1) P_n^{m'}(\xi_2) - Q_n^{m'}(\xi_2)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times P_n^{m'}(\xi_1)\right] + A\right\}/\left[(\nu_{1,0}-1)^2 P_n^m(\xi_1) P_n^{m'}(\xi_1) Q_n^m(\xi_2) Q_n^{m'}(\xi_2) - B\right]\times$$

$$\times\left[Q_n^m(\xi_1)/P_n^m(\xi_1)\right], \qquad (2\text{-}115б)$$

где $A = Q_n^{m'}(\xi_1) Q_n^{m'}(\xi_2)\left[Q_n^m(\xi_2) P_n^m(\xi_1) - Q_n^m(\xi_1) P_n^m(\xi_2)\right]$; $B = \left[\nu_{1,0} P_n^m(\xi_1) Q_n^{m'}(\xi_1) - P_n^{m'}(\xi_1) Q_n^m(\xi_1)\right]\left[\nu_{1,0} Q_n^m(\xi_2) P_n^{m'}(\xi_2) - P_n^m(\xi_2)\times\right.$ $\left.\times Q_n^{m'}(\xi_2)\right]$; штрихи у присоединенных функций Лежандра обозначают производные по аргументу ξ_i; $n \in [0; \infty]$, $m \in [-n; n]$ — параметры.

2. Сжатый сфероид (рис. 2-19). Для неоднородного магнитного поля, используя (2-10) и данные из табл. 2-1, получим

$$Э^{сф(1)}_{n,m} = \left[(n-m)!^2/\nu_{1,0}(n+m)!^2\right]\left\{\left[(\nu_{1,0}-1)^2 P_n^{m'}(\bar\mu_1)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times Q_n^m(\bar\mu_2) P_n^m(\bar\mu_1) Q_n^{m'}(\bar\mu_2) - B\right](\xi_1^2+1)(\xi_2^2+1)\right\}; \qquad (2\text{-}116а)$$

$$W^{сф(1)}_{n,m(i)} = \left\{(\nu_{1,0}-1)\left\{\nu_{1,0} Q_n^m(\bar\mu_1) Q_n^m(\bar\mu_2)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left[Q_n^{m'}(\bar\mu_1) P_n^{m'}(\bar\mu_2) - Q_n^{m'}(\bar\mu_2) P_n^{m'}(\bar\mu_1)\right] + A\right\} P_n^m(i\xi_1)\right\}\times$$

$$\times\left\{\left[(\nu_{1,0}-1)^2 P_n^m(\bar\mu_1) P_n^{m'}(\bar\mu_1) Q_n^m(\bar\mu_2) Q_n^{m'}(\bar\mu_2) - B\right]\times\right.$$

$$\left.\times(n-m)!(\xi_1^2+1)(\xi_2^2+1) Q_n^m(i\xi_1)\right\}^{-1}, \qquad (2\text{-}116б)$$

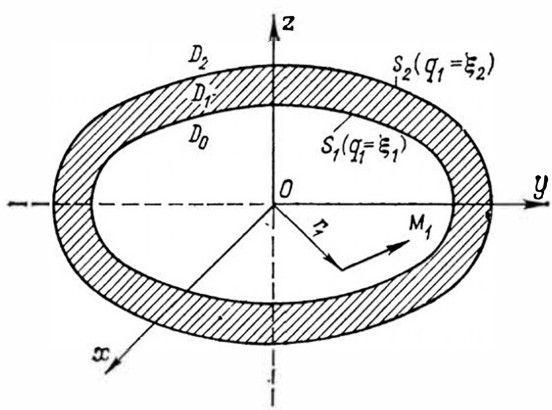


Рис. 2-19. Сжатый толстостенный сфероид в дипольном магнитном поле

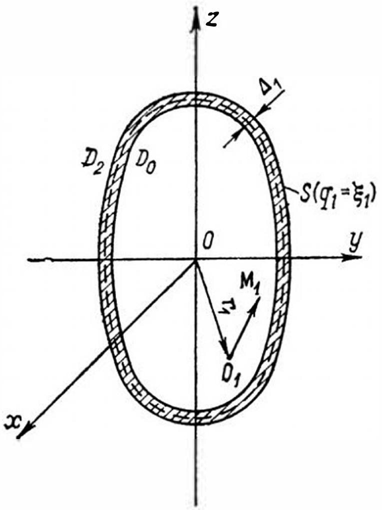


Рис. 2-20. Вытянутый тонкостенный сфероид в дипольном магнитном поле

где $\bar{\mu}_j = i\xi_j$ $(j = 1, 2)$; $i = \sqrt{-1}$;

$$A = Q_n^{m'}(\bar{\mu}_1)\,Q_n^{m'}(\bar{\mu}_2)\left[Q_n^m(\bar{\mu}_2)\times\right.$$
$$\left.\times P_n^m(\bar{\mu}_1) - Q_n^m(\bar{\mu}_1)\,P_n^m(\bar{\mu}_2)\right];$$
$$B = \left[\nu_{1,0}P_n^m(\bar{\mu}_1)\,Q_n^{m'}(\bar{\mu}_1) -\right.$$
$$\left.- P_n^{m'}(\bar{\mu}_1)\,Q_n^m(\bar{\mu}_1)\right]\left[\nu_{1,0}Q_n^m(\bar{\mu}_2)\times\right.$$
$$\left.\times P_n^{m'}(\bar{\mu}_2) - P_n^m(\bar{\mu}_2)\,Q_n^{m'}(\bar{\mu}_2)\right];$$

$n \in [0;\ \infty]$; $m \in [-n;\ n]$ — параметры.

Формулы (2-115) и (2-116) различаются лишь аргументами в присоединенных функциях Лежандра; для вытянутых сфероидов — ξ_j, для сжатых — $i\xi_j$.

Сфероиды многослойные.

Формулы для расчета эффективности экранирования и функций обратного действия многослойными толстостенными сфероидами могут быть получены из формул (2-9) — для ν оболочек и из (2-11) — для двухслойных оболочек.

Сфероиды тонкостенные. Используя общий метод расчета, представленный в § 2-1. из (2-21) можно получить формулы для расчета эффективности экранирования и функций обратного действия ν конфокальными тонкостенными сфероидами.

Сфероиды однослойные.

1. Вытянутый сфероид (рис. 2-20). Для неоднородного магнитного поля произвольного направления, используя формулы (2-22) и данные из табл. 2-1, получим

$$Э_{n,m}^{сф\,(1)} = 1 + 2(-1)^m p_1 Q_n^m(\xi_1)\,P_n^m(\xi_1)\frac{\left[n(n+1)\left(\xi_1^2-1\right)+m^2\right](n-m)!}{(n+m)!\left(\xi_1^2-1\right)}; \tag{2-117а}$$

$$W_{n,m(i)}^{сф\,(1)} = -2(-1)^m p_1\left[Q_n^m(\xi_1)\right]^2\left[n(n+1)\left(\xi_1^2-1\right)+m^2\right](n-m)!\times$$
$$\times\left[P_n^m(\xi_1)/Q_n^m(\xi_1)\right]\left\{(n+m)!\left(\xi_1^2-1\right)+2(-1)^m p_1 Q_n^m(\xi_1)\,P_n^m(\xi_1)\times\right.$$
$$\left.\times\left[n(n+1)\left(\xi_1^2-1\right)+m^2\right](n-m)!\right\}^{-1}, \tag{2-117б}$$

где $p_1 = \mu_1\Delta_{1a}/(2\mu_0)$; Δ_{1a} — толщина сфероида в экваториальном сечении.

2. Сжатый сфероид (рис. 2-21). Для неоднородного магнитного поля произвольного направления, используя формулы

(2-22) и данные из табл. 2-1, получим

$$Э_{n,m}^{сф(1)} = 1 + 2i(-1)^m p_1 Q_n^m(\nu_1) P_n^m(\nu_1) \frac{\left[n(n+1)\left(1+\xi_1\right)^2 + m^2\right](n-m)!}{\left(1+\xi_1^2\right)(n+m)!};$$

(2-118а)

$$W_{n,m(i)}^{сф(1)} = -2i(-1)^m p_1 \left(Q_n^m(\nu_1)\right)^2 \left[n(n+1)\left(1+\xi_1^2\right) + m^2\right](n-m)! \times$$
$$\times \left[P_n^m(\nu_1)/Q_n^m(\nu_1)\right] \left\{(n+m)!\left(1+\xi_1^2\right) + 2i(-1)^m p_1 Q_n^m(\nu_1) \times\right.$$
$$\left. \times P_n^m(\nu_1)\left[n(n+1)\left(1+\xi_1^2\right) + m^2\right](n-m)!\right\}^{-1}, \quad (2\text{-}118б)$$

где $\nu_1 = i\xi_1$.

Сравнение эффективности экранирования и функций обратного действия, полученных с помощью точных граничных условий в виде (2-115)—(2-116) и с помощью эквивалентных граничных условий в виде (2-117)—(2-118), показывает, что последние формулы более просты и удобны в обращении. У оболочек с толщинами $\Delta_{1a} \to 0$ и изготовленных из материала с большой магнитной проницаемостью эти функции совпадают.

Сфероиды многослойные.

Формулы для расчета эффективности экранирования ν-слойными тонкостенными сфероидами и их функций обратного действия могут быть получены из формул (2-21) — для ν оболочек и из (2-23) — для двухслойных оболочек.

Круговые цилиндрические оболочки.

Цилиндры толстостенные.

Интегральная эффективность экранирования. Дипольные источники на конечных расстояниях от ферромагнитного экрана создают неоднородные магнитные поля, которые делают эффективность экранирования зависящей от места расположения диполя и его ориентации, т. е. от факторов, которые не фигурировали в однородных полях.

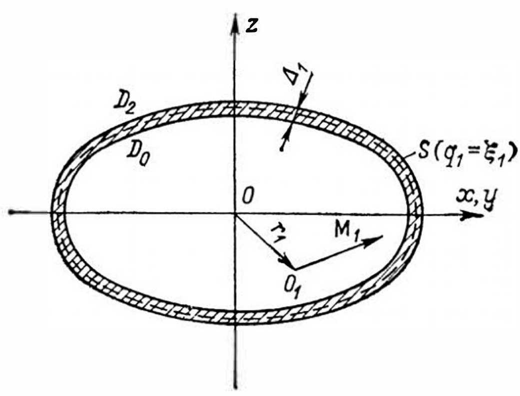


Рис. 2-21. Сжатый тонкостенный сфероид в дипольном магнитном поле

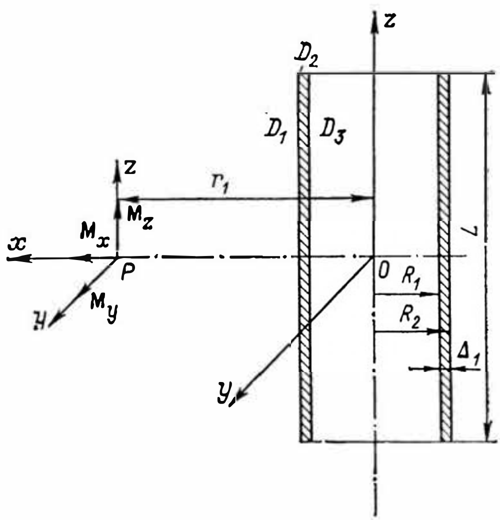


Рис. 2-22. Воздействие дипольного магнитного поля на круговой цилиндрический экран

Ниже приводятся формулы для расчета эффективности экранирования для трех ориентаций единичного магнитного диполя $D[\mathbf{M}=1, \mathbf{r}_1]$ относительно круговой цилиндрической оболочки. Метод состоит в нахождении решения для неоднородного магнитного поля при условии (рис. 2-22):

а) $\nu_{1,0}\Delta_1/R \gg 1$, где $R=(R_1+R_2)/2$ — средний радиус оболочки; $\nu_{1,0}=\mu_1/\mu_0$;

б) материал обладает однородной магнитной проницаемостью μ_1, не зависящей от напряженности приложенного магнитного поля;

в) стенки экрана малы по сравнению с их линейными размерами ($\Delta_1/R_1 \ll 1$).

Бесконечная цилиндрическая оболочка.

1. Диполь расположен параллельно оси Oz. Магнитная индукция в непроводящих областях D_1, D_3 определяется из уравнения $\mathbf{B}^{(1,3)}=\operatorname{grad} v^{(1,3)}$; $v^{(1,3)}$ — решения уравнения Лапласа в областях D_1, D_3. В координатах (ρ, z)

$$v^{(1,3)}=[1/(2\pi^2)]\int\limits_0^\infty \bar{v}^{(1,3)}\sin(\lambda z)\,d\lambda,$$

где $\bar{v}^{(1)}=\beta\lambda K_0(\lambda\rho)$, $\rho \geqslant R_2$; $\bar{v}^{(3)}=\lambda[K_0(\lambda\rho)+\alpha I_0(\lambda\rho)]$, $0 \leqslant \rho \leqslant R_1$; I_0, K_0 — модифицированные цилиндрические функции первого и второго рода; $\alpha \equiv \alpha(\lambda)$, $\beta \equiv \beta(\lambda)$ — неизвестные коэффициенты; λ — параметр. При отсутствии оболочки $\alpha(\lambda)=0$, $\beta(\lambda)=1$ и $v^{(0)}=z/\left[4\pi(\rho^2+z^2)^{3/2}\right]$, где $v^{(0)}$ — скалярный потенциал исходного поля диполя.

Трансформанты Фурье для магнитной индукции имеют вид

$$b_\rho^{(3)} = \lambda^2\left[K_0'(\lambda\rho) + \alpha I_0'(\lambda\rho)\right];\quad b_z^{(3)} = \lambda^2\left[K_0(\lambda\rho) + \alpha I_0(\lambda\rho)\right] \text{ — в области } D_3;$$

$$b_\rho^{(1)} = \beta\lambda^2 K_0'(\lambda\rho);\quad b_z^{(1)} = \beta\lambda^2 K_0(\lambda\rho) \text{ — в области } D_1, \tag{2-119}$$

где b_ρ и b_z — синусная и косинусная трансформанты.

Магнитная индукция в области D_2 (в материале оболочки) находится приближенно. Радиальная составляющая магнитной индукции на поверхности $\rho = R_1$ раскладывается в ряд Тейлора относительно $\rho = R_2$:

$$\mathbf{B}_\rho(R_1) = \mathbf{B}_\rho(R_2) - (\partial\mathbf{B}_\rho/\partial\rho)_{R_2}\Delta_1 + \ldots \tag{2-120}$$

Осевая составляющая магнитной индукции постоянна, поэтому

$$\mathbf{B}_z(R_1) \approx \mathbf{B}_z(R_2).$$

Составляющие $\mathbf{B}$ должны удовлетворять условию

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = \partial\mathbf{B}_\rho/\partial\rho + \mathbf{B}_\rho/\rho + \partial\mathbf{B}_z/\partial z = 0.$$

Граничные условия с учетом выражений (1-20)—(1-21) для трансформант Фурье записываются в виде

$$\begin{aligned} &b_\rho(R_1) = b_\rho^{(3)}(R_1);\quad \mu^{-1}b_z(R_1) = b_z^{(3)}(R_1);\\ &b_\rho(R_2) = b_\rho^{(1)}(R_2);\quad \mu^{-1}b_z(R_2) = b_z^{(1)}(R_2). \end{aligned} \tag{2-121}$$

Из условий (2-121) определяем неизвестные α, β и эффективность экранирования цилиндром:

$$Э_z^{ц(1)} = \left[\frac{2}{\pi}\left(\frac{D}{R}\right)^3 \int\limits_0^\infty \frac{K_0(xD/R)\,x^2\,dx}{1 + (\nu_{1,0}\Delta_1/R)\,x^2 K_0(x)\,I_0(x)}\right]^{-1}, \tag{2-122}$$

где $R = (R_1 + R_2)/2$.

2. Диполь расположен параллельно оси Ox. Магнитные потенциалы в непроводящих областях записываются в виде косинусного преобразования [в координатах (ρ, z, φ)]:

$$v^{(1,3)} = [1/(2\pi^2)]\cos\varphi \int\limits_0^\infty \bar{v}^{(1,3)}\cos\lambda z\,d\lambda, \tag{2-123}$$

где $\bar{v}^{(1)} = \beta\lambda K_1(\lambda\rho)$; $\bar{v}^{(3)} = \lambda\left[K_1(\lambda\rho) + \alpha I_1(\lambda\rho)\right]$.

Скалярный потенциал поля диполя $v^{(0)}$ в свободном пространстве

$$v^{(0)} = \rho\cos\varphi/\left[4\pi(\rho^2 + z^2)^{3/2}\right]. \tag{2-124}$$

При использовании преобразований, аналогичных (2-119), получим

$$b_{\rho}^{(3)} = \lambda^2 [K_1'(\lambda\rho) + \alpha I_1'(\lambda\rho)]; \quad b_{\varphi}^{(3)} = -\lambda\rho^{-1}[K_1(\lambda\rho) + \alpha I_1(\lambda\rho)];$$

$$b_z^{(3)} = -\lambda^2[K_1(\lambda\rho) + \alpha I_1(\lambda\rho)]; \quad b_{\rho}^{(1)} = \beta\lambda^2 K_1'(\lambda\rho); \tag{2-125}$$

$$b_{\varphi}^{(1)} = -\beta\lambda\rho^{-1}K_1(\lambda\rho); \quad b_z^{(1)} = -\beta\lambda^2 K_1(\lambda\rho).$$

Используя граничные условия (2-121) и сделав необходимые преобразования, получим

$$Э_x^{ц\,(1)} = \left\{ \frac{R}{\pi\nu_{1,\,0}\Delta_1} \left(\frac{D}{R}\right)^3 \int\limits_0^{\infty} [K_0(xD/R) + \right.$$

$$\left. + K_1(xD/R)/(xD/R)]\, x^2\, dx/[(1+x^2)\, K_1(x)\, I_1(x)] \right\}^{-1}. \tag{2-126}$$

3. Диполь расположен параллельно оси Oy. Анализ начинается с подстановки $\sin\varphi$ в выражение (2-123) вместо $\cos\varphi$. Исследование проводится так же, как для диполя, расположенного параллельно оси Ox. Эффективность экранирования определяется формулой

$$Э^{ц\,(1)} = \left\{ \frac{2R}{\pi\nu_{1,\,0}\Delta_1} \left(\frac{D}{R}\right)^2 \int\limits_0^{\infty} \frac{K_1(xD/R)\, x\, dx}{(1+x^2)\, K_1(x)\, I_1(x)} \right\}^{-1}. \tag{2-127}$$

Конечная цилиндрическая оболочка.

1. Диполь расположен параллельно оси Oz. Для конечного цилиндра метод состоит в построении решений, которые дают хорошее приближение для напряженности магнитного поля в центре цилиндра, имеющего длину, бо́льшую длины радиуса.

Рассмотрим единичный диполь $D[\mathbf{M} = 1, \mathbf{r}_1]$ в точке P параллельно оси Oz (рис. 2-22). Потенциал $v^{(1)}$ может быть представлен в виде потенциала $v^{(0)}$ — поля диполя и v^s — потенциала рассеяния. Предположим, что потенциал v^s вблизи цилиндра, исключая области, примыкающие к концам, состоит из уходящих цилиндрических волн, как и в бесконечном цилиндре. Решение представляется в виде [координаты (ρ, φ, z)]

$$v^s = \sum_n \sum_m \varepsilon_m a_{nm} \cos(m\varphi)\, K_m(\lambda_n\rho) \sin(\lambda_n z), \quad -L/2 < z < L/2, \tag{2-128}$$

где $\lambda_n = (2n+1)(\pi/L)$; $\varepsilon_0 = 1$; $\varepsilon_m = 2$; $m \neq 0$; L — длина цилиндра.

Потенциал исходного поля

$$v^{(0)} = \sum_n \sum_m \varepsilon_m \cos(m\varphi)\, \psi_{nm}(\rho) \sin(\lambda_n z), \tag{2-129}$$

где $\psi_{nm}(\rho)$ может быть рассчитано непосредственно. В координатах (ρ, φ, z)

$$v^{(0)} = z/[4\pi(\rho^2 + D^2 - 2\rho D\cos\varphi + z^2)^{3/2}]. \tag{2-130}$$

Используя выражение

$$(\rho^2 + D^2 - 2\rho D\cos\varphi + z^2)^{-1/2} =$$

$$= \sum_m \varepsilon_m \cos m\varphi \int_0^\infty e^{-zt} J_m(t\rho) J_m(tD)\,dt, \quad m \in [0;\ \infty],$$

где $J_m(t\rho)$, $J_m(tD)$ — функции Бесселя первого рода, и преобразуя (2-129), получим

$$\psi_{nm}(\rho) = \frac{\lambda_n}{\pi L}\int_0^\infty \frac{J_m(u)\,J_m(uD/\rho)}{\lambda_n^2\rho^2 + u^2}\left[1 - (-1)^n \frac{u}{\lambda_n \rho} e^{-\frac{uL}{2\rho}}\right] u\,du. \quad (2\text{-}131)$$

Для области D_3

$$v^{(3)} = \sum_n \sum_m \varepsilon_m C_{nm} \cos(m\varphi)\, I_m(\lambda_n \rho)\sin(\lambda_n z). \quad (2\text{-}132)$$

После преобразований, аналогичных (2-119), получим

$$b^{(3)}_{\rho,\,nm} = C_{nm}\lambda_n I'_m(\lambda_n\rho); \quad b^{(3)}_{z,\,nm} = C_{nm}\lambda_n I_m(\lambda_n\rho); \quad (2\text{-}133)$$

$$b^{(1)}_{\rho,\,nm} = \psi'_{nm}(\rho) + a_{nm}\lambda_n K'_m(\lambda_n\rho);$$

$$b^{(1)}_{z,\,nm} = \lambda_n\psi_{nm}(\rho) + a_{nm}\lambda_n K_m(\lambda_n\rho).$$

Составляющая магнитной индукции в точке O

$$\mathbf{B}_z^{(3)}(0) = \sum_n \lambda_n C_{n0}. \quad (2\text{-}134)$$

Для области D_2 используем ряд Тейлора:

$$\mathbf{B}_\rho(R_2) = \mathbf{B}_\rho(R_1) + (\partial \mathbf{B}_\rho/\partial\rho)_{R_1}\Delta_1 + \ldots \quad (2\text{-}135)$$

На основании $\partial\mathbf{B}_\rho/\partial\rho$, $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ и граничных условий при $\rho = R_1$ получим

$$b_{\rho,\,n0}(R_2) = C_{n0}\lambda_n\left[I'_0(\lambda_n R) + \nu_{1,\,0}\Delta_1 I_0(\lambda_n R)\,\lambda_n\right] =$$

$$= \psi'_{n0}(R) + a_{n0}\lambda_n K'_0(\lambda_n R). \quad (2\text{-}136)$$

Составляющая $\mathbf{B}_z$ приблизительно постоянна на оболочке. Используя это допущение,

$$C_{n0} I_0(\lambda_n R) = \psi_{n0}(R) + a_{n0}K_0(\lambda_n R).$$

Окончательно с учетом (2-133) и (2-136)

$$C_{n0} = \frac{\lambda_n R\psi_{n0}(R)\,K_1(\lambda_n R) + R\psi'_{n0}(R)\,K_0(\lambda_n R)}{1 + \nu_{1,\,0}\Delta_1 R\lambda_n^2 K_0(\lambda_n R)\,I_0(\lambda_n R)}. \quad (2\text{-}137)$$

Эффективность экранирования в центре цилиндра

$$\mathcal{E}_z^{\text{ц}(1)}(0) = \left[\frac{4R}{\pi L}\left(\frac{D}{R}\right)^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 R^2\left[K_0(\lambda_n D) - (-1)^n g_n(D/R,\ L/R)\right]}{1 + \nu_{1,\,0}\Delta_1 R\lambda_n^2 K_0(\lambda_n R)\,I_0(\lambda_n R)}\right]^{-1}$$

(2-138)

где

$$g_n = \int_0^\infty \frac{\exp[-uL/(2R)]}{u^2+\lambda_n^2R^2} J_0(uD/R)\Big[J_0(u)K_1(\lambda_nR) - \\ - \frac{u}{\lambda_nR}J_1(u)K_0(\lambda_nR)\Big]u^2\,du.$$

В выражении (2-137) $\psi'(R)$ выражено в форме, подобной (1-136), и использовано тождество

$$\int_0^\infty t^{\nu-\mu-1}J_\nu(at)J_\mu(bt)\left(t^2+z^2\right)^{-1}dt = z^{\nu-\mu}K_\nu(az)I_\mu(bz).$$

2. Диполь расположен параллельно оси Ox. Потенциал рассеяния v^s в координатах $(\rho,\ \varphi,\ z)$ записывается в виде

$$v^s = \sum_n\sum_m \varepsilon_n\varepsilon_m a_{nm}\cos(m\varphi)K_m(\lambda_n\rho)\cos(\lambda_nz),\ \lambda_n = 2\pi n/L; \\ n\in[0;\ \infty];\ m\in[0;\ \infty]. \tag{2-139}$$

Потенциал $v^{(0)}$ определяется так же, как в выражении (2-139). Потенциал

$$v^{(3)} = \sum_n\sum_m \varepsilon_n\varepsilon_m C_{nm}\cos(m\varphi)I_m(\lambda_n\rho)\cos(\lambda_nz). \tag{2-140}$$

Составляющая магнитной индукции в точке O

$$\mathbf{B}_x^{(3)}(0) = \sum_n \varepsilon_n\lambda_nC_{n1},\quad n\in[0;\ \infty].$$

Эффективность экранирования, найденная при анализе ориентации диполя относительно конечного цилиндра, расположенного параллельно оси Oz, запишется в виде

$$Э_x^{ц\,(1)}(0) = \left\{\frac{2R^2(D/R)^2}{\nu_{1,0}\Delta_1L}\left[h(D/R,\ L/R) + \sum_{n=1}^\infty h_n(D/R,\ L/R)\right]\right\}^{-1}, \tag{2-141}$$

где

$$h_n(D/R,\ L/R) = \frac{\lambda_nR}{\left(1+\lambda_n^2R^2\right)K_1(\lambda_nR)I_1(\lambda_nR)}\Big\{\lambda_nR\Big[K_0(\lambda_nD) + \\ + \frac{K_1(\lambda_nD)}{\lambda_nD}\Big] + (-1)^n\int_0^\infty \frac{\exp[-uL/(2R)]}{u^2+\lambda_n^2R^2}[uJ_0(u)K_1(\lambda_nR)+\lambda_nRJ_1(u)K_0\times \\ \times(\lambda_nR)]\left[J_0(uD/R) - \frac{J_1(uD/R)}{uD/R}\right]u\,du\Big\}; \tag{2-142}$$

$$h(D/R,\ L/R) = (R/D)^2 + \int_0^\infty e^{-uL/(2R)}\left[J_0(uD/R) - \frac{J_1(uD/R)}{uD/R}\right]u\,du.$$

Формула (2-141) с учетом (2-142) трудоемка для инженерных расчетов. Поэтому с достаточной точностью можно воспользоваться формулой (2-126), выведенной для бесконечного цилиндра.

3. Диполь расположен параллельно оси Oy. Как и при расположении диполя параллельно оси Ox, результаты расчета эффективности экранирования для конечного цилиндра хорошо согласуются с результатами расчета для бесконечного цилиндра. Поэтому, не прибегая к усложнению выражений, можно воспользоваться формулой (2-127).

Эффективность экранирования по гармоникам.

Цилиндры толстостенные. Используя общий метод расчета, представленный в § 2-1, из формул (2-9) можно получить формулы для экранирующих функций ν толстостенных цилиндров в неоднородных магнитных полях произвольного вида.

Цилиндры однослойные.

Используя выражения (2-10) для расчета эффективности экранирования и функций обратного действия, получим (рис. 2-23, где ρ_3, $\rho_4 \to \infty$)

$$Э^{ц(1)}_{\lambda, m} = \nu_{0,1}\{\nu_1\nu_2[(\nu_{1,0}-1)^2 I_m(\nu_1) I'_m(\nu_1) K_m(\nu_2) K'_m(\nu_2) - B]\}; \tag{2-143a}$$

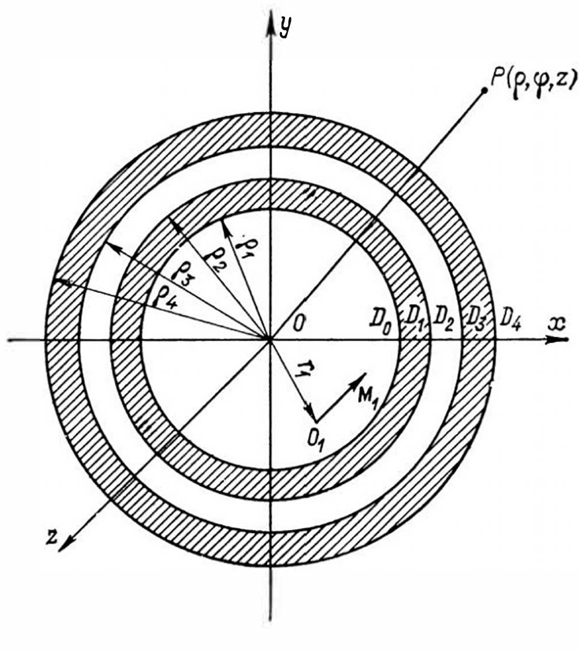


Рис. 2-23. Система толстостенных круговых цилиндров в дипольном магнитном поле

$$W^{\text{ц}(1)}_{\lambda m(i)} = \{(\nu_{1,0}-1)\{\nu_{1,0}K_m(\nu_1)K_m(\nu_2)[K'_m(\nu_1)I'_m(\nu_2) - K'_m(\nu_2)I'_m(\nu_1)] + A\}\}\{[(\nu_{1,0}-1)^2 I_m(\nu_1)I'_m(\nu_1)K_m(\nu_2)\times K'_m(\nu_2) - B][K_m(\nu_1)/I_m(\nu_1)]\}^{-1}, \quad (2\text{-}143б)$$

где $\nu_j = |\lambda|\rho_j$, $j=1,\ 2$; $A = K'_m(\nu_1)K'_m(\nu_2)[K_m(\nu_2)I_m(\nu_1) - K_m(\nu_1)I_m(\nu_2)]$; $B=[\nu_{1,0}I_m(\nu_1)K'_m(\nu_1) - I'_m(\nu_1)K_m(\nu_1)][\nu_{1,0}K_m \times (\nu_2)I'_m(\nu_2) - I_m(\nu_2)K'_m(\nu_2)]$, $\nu_{\alpha,\beta} = \mu_\alpha/\mu_\beta$; $I_m(\nu_j)$ и $K_m(\nu_j)$ — модифицированные цилиндрические функции первого и второго рода; штрихи у функций обозначают производные по аргументу ν_j; $-\infty < \lambda < \infty$; $m \in [-\lambda;\ \lambda]$ — параметры.

Цилиндры двухслойные.

Эффективность экранирования и функции обратного действия двухслойной цилиндрической оболочкой можно получить из формул (2-11), если подставить в них

$$a_1^{(j)} = I_m(\beta_j);\ a_2^{(j)} = I'_m(\beta_j);\ b_1^{(j)} = K_m(\beta_j);\ b_2^{(j)} = K'_m(\beta_j),$$

где $\beta_j = |\lambda|\rho_j$, $j = 1,\ 2,\ 3,\ 4$; λ — параметр интегрирования $(-\infty < \lambda < \infty)$; ρ_j — радиусы цилиндрических оболочек в соответствии с рис. 2-23.

Цилиндры многослойные.

Формулы для расчета экранирующих функций ν-слойных толстостенных концентрических круговых цилиндров могут быть получены из формул (2-9), где $a_1^{(j)} = I_m(\beta_j)$; $a_2^{(j)} = I'_m(\beta_j)$; $b_j^{(1)} = K_m(\beta_j)$; $b_2^{(j)} = K_m(\beta_j)$; $\beta_j = |\lambda|\rho_j$, $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2\nu$; ρ_j — радиусы оболочек; λ — параметр $(-\infty < \lambda < \infty)$; штрихи у модифицированных цилиндрескхи функций обозначают производные по аргументу β_j.

Цилиндры тонкостенные.

Используя общий метод расчета, рассмотренный в § 2-1, из выражений (2-21) можно получить формулы для расчета эффективности экранирования ν тонкостенными цилиндрами и функций обратного действия.

Цилиндры однослойные.

Используя формулы (2-22) и данные табл. 2.1, для расчета экранирующих функций кругового цилиндра получим (рис. 2-24, где $\rho_2 \to \infty$)

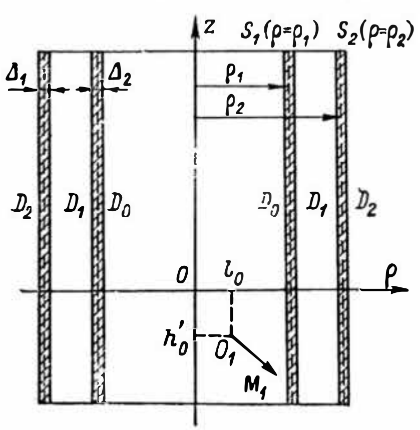


Рис. 2-24. Система тонкостенных круговых цилиндров в дипольном магнитном поле

$$Э^{ц(1)}_{\lambda, m} = 1 + \nu_{1,0}(\Delta_1/\rho_1) K_m(\nu_1) I_m(\nu_1)(m^2 + \nu_1^2); \quad (2\text{-}144а)$$

$$W^{ц(1)}_{\lambda, m(i)} = -\frac{[\nu_{1,0}(\Delta_1/\rho_1)(m^2+\nu_1^2) K_m^2(\nu_1)][I_m(\nu_1)/K_m(\nu_1)]}{1 + \nu_{1,0}(\Delta_1/\rho_1)(m^2+\nu_1^2) K_m(\nu_1) I_m(\nu_1)}, \quad (2\text{-}144б)$$

где $\nu_1 = |\lambda|\rho_1$; $\nu_{1,0} = \mu_1/\mu_0$; Δ_1 — толщина оболочки; $-\infty < \lambda < \infty$; $m \in [-\lambda; \lambda]$ — параметры; $I_m(\nu_1)$ и $K_m(\nu_1)$ — модифицированные цилиндрические функции первого и второго рода.

Цилиндры двухслойные.

Используя выражения (2-23) для расчета экранирующих функций цилиндрического экрана, состоящего из двух слоев, получим

$$Э^{ц(2)}_{\lambda, m} = [1 + h^{(1)}_m I_m(\nu_1) K_m(\nu_1)][1 + h^{(2)}_m I_m(\nu_2) K_m(\nu_2)] - - h^{(1)}_m h^{(2)}_m I_m^2(\nu_1) K_m^2(\nu_2); \quad (2\text{-}145а)$$

$$W^{ц(2)}_{\lambda, m(i)} = -\{h^{(1)}_m K_m^2(\nu_1)[1 + h^2_m I_m(\nu_2) K_m(\nu_2)] + + h^{(2)}_m K_m^2(\nu_2)[1 - h^{(1)}_m I_m(\nu_1) K_m(\nu_1)]\}\{[1 + h^{(1)}_n I_m(\nu_1) K_m(\nu_1)] \times \times [1 + h^{(2)}_m I_m(\nu_2) K_m(\nu_2)] - h^{(1)}_m h^{(2)}_m I_m^2(\nu_1) K_m^2(\nu_2)\}^{-1} [I_m(\nu_1)/K_m(\nu_1)], \quad (2\text{-}145б)$$

где $\nu_j = |\lambda|\rho_j$; ρ_j, $j = 1, 2$ — средние радиусы цилиндров.

Цилиндры многослойные.

Формулы для расчета экранирующих функций ν-слойных тонкостенных концентрических круговых цилиндров могут быть получены из формул (2-21), где $a_1^{(j)} = I_m(\beta_j)$; $a_2^{(j)} = I'_m(\beta_j)$; $b_1^{(j)} = K_m(\beta_j)$; $b_2^{(j)} = K'_m(\beta_j)$; $\beta_j = |\lambda|\rho_j$, $j = 1, \ldots, \nu$; ρ_j — средние радиусы оболочек; λ — параметры $(-\infty < \lambda < \infty)$.

Плоские оболочки.

Пластины толстостенные. Используя общий метод расчета (см. § 2-1), из формул (2-9) можно получить формулы для расчета экранирующих функций ν-слойных параллельных толстостенных пластин по гармоникам.

Пластины однослойные.

На основании (2-10) и данных табл. 2-1 получим (рис. 2-25, где $z_3, z_4, \ldots, z_{2\nu} \to \infty$)

$$Э^{п(1)}_{\lambda, \beta} = (4\nu_{1,0})^{-1}[(\nu_{1,0} + 1)^2 - (\nu_{1,0} - 1)^2 e^{-2a\Delta_1}]; \quad (2\text{-}146а)$$

$$W^{п(1)}_{\lambda, \beta(i)} = -\frac{(\nu_{1,0}^2 - 1)[1 - \exp(-2a\Delta_1)]\exp(-2az_1)}{(\nu_{1,0} + 1)^2 - (\nu_{1,0} - 1)^2 \exp(-2a\Delta_1)}, \quad (2\text{-}146б)$$

где $-\infty < \lambda < \infty$, $-\infty < \beta < \infty$ — параметры; $a = \sqrt{\lambda^2 + \beta^2}$; z_1, z_2 — координаты сторон плоской пластины.

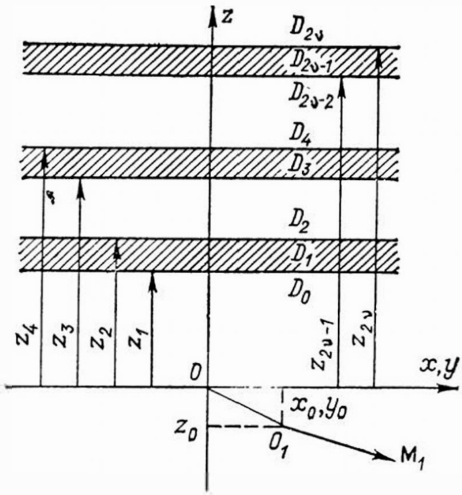


Рис. 2-25. Система толстостенных пластин в дипольном магнитном поле

Пластины двухслойные.

Используя формулы (2-11) и данные табл. 2-1, получим (рис. 2-25, где $z_5, \ldots, z_{2\nu} \to \infty$)

$$Э^{п\,(2)}_{\lambda,\beta} = (16\nu_{1,0}\nu_{2,0})^{-1}\left\{\left[(\nu_{1,0}+1)^2 - (\nu_{1,0}-1)^2 e^{-2a\Delta_1}\right] \times\right.$$
$$\times \left[(1+\nu_{2,0})^2 - (\nu_{2,0}-1)^2 e^{-2a\Delta_2}\right] +$$
$$\left. + \left(\nu^2_{1,0}-1\right)\left(\nu^2_{2,0}-1\right) e^{-2az_{3,2}}\left(1-e^{-2a\Delta_1}\right)\left(1-e^{-2a\Delta_2}\right)\right\}; \quad (2\text{-}147а)$$

$$W^{п\,(2)}_{\lambda,\beta\,(i)} = -\left\{\left\{\left[(\nu_{1,0}+1)^2 - (\nu_{1,0}-1)^2 e^{-2a\Delta_1}\right]\left(\nu^2_{2,0}-1\right)\left(1-e^{-2az_{3,2}}\right) -\right.\right.$$
$$\left.\left. - \left[(\nu_{2,0}+1)^2 - (\nu_{2,0}-1)^2 e^{-2a\Delta_1}\right]\left(\nu^2_{1,0}-1\right)\left(1-e^{-2az_{3,2}}\right)\right\} e^{-2az_1}\right\} \times$$
$$\times \left\{\left[(\nu_{1,0}+1)^2 - (\nu_{1,0}-1)^2 e^{-2a\Delta_1}\right]\left[(\nu_{2,0}+1)^2 - (\nu_{2,0}-1)^2 e^{-2a\Delta_2}\right] +\right.$$
$$\left. + \left(\nu^2_{1,0}-1\right)\left(\nu^2_{2,0}-1\right)\left(1-e^{-2a\Delta_1}\right)\left(1-e^{-2a\Delta_2}\right) e^{-2az_{3,2}}\right\}^{-1}. \quad (2\text{-}147б)$$

Аналогичным способом с помощью формул (2-9) могут быть написаны экранирующие функции для ν оболочек.

Пластины тонкостенные. Используя общий метод расчета (см. § 2-1), из формул (2-21) можно получить экранирующие функции ν-слойных параллельных тонкостенных плоских пластин.

Пластины однослойные.

На основании формул (2-22) и данных табл. 2-1 получим (рис. 2-26, где $z_2, \ldots, z_\nu \to \infty$)

$$Э^{п\,(1)}_{\lambda,\beta} = 1 + p_1 a; \qquad (2\text{-}148а)$$

$$W^{п\,(1)}_{\lambda,\beta\,(i)} = -p_1 a \exp(-2az_1)/(1+p_1 a), \qquad (2\text{-}148б)$$

где $-\infty < \lambda < \infty$; $-\infty < \beta < \infty$; $a^2 = \lambda^2 + \beta^2$.

Пластины двухслойные.

Используя формулы (2-23) и данные табл. 2-1, получим (рис. 2-26, где $z_3, \ldots, z_\nu \to \infty$)

$$Э^{п(2)}_{\lambda,\beta} = 1 + (p_1 + p_2)a + p_1 p_2 a^2 [1 - \exp(-2az_{2,1})]; \qquad (2\text{-}149а)$$

$$W^{п(1)}_{\lambda,\beta(l)} = -\frac{(1 - p_1 a) p_2 a \exp[-2a(z_2 - z_1)] + (1 + p_2 a) p_1 a}{1 + (p_1 + p_2) a + p_1 p_2 a^2 [1 - \exp(-2az_{2,1})]}, \qquad (2\text{-}149б)$$

где z_1, z_2 — средние координаты пластин.

Аналогичным способом с помощью выражений (2-21) можно определить экранирующие функции для ν параллельных пластин. Формулы (2-148)—(2-149) могут быть получены непосредственно из (2-146)—(2-147), если положить $\Delta_l \to 0$, $\nu_{l,0} \gg 1$.

Оболочки с концентрическим металлическим включением.

Сферическая оболочка. Используя методику расчета, изложенную в § 2-1 для тонкостенной сферической оболочки с ферромагнитным включением, получим:

1) оболочку с полым включением; для иллюстрации воспользуемся рис. 2-27, где штриховой линией обозначена такая оболочка; эффективность экранирования

$$Э^{c(1)}_{n(в)} = \frac{2\left[p^{2n+1}_{в,0} K^{(1)}_n K^{(в)}_n - l^{(1)}_n l^{(в)}_n\right]}{(2n+1)\left\{l^{(в)}_n - p^{2n+1}_{в,0}[n/(n+1)] K^{(в)}_n\right\}}; \qquad (2\text{-}150а)$$

где $l^{(j)}_n = n(n+1) p_j R_j^{-1} + 0{,}5(2n+1)$; $K^{(j)}_n = 1 + p_j R_j^{-1}(n+1)^2$, $j = (0;\ в)$; $p_j = \mu_j \Delta_j/(2\mu_0)$; $R_0 = 0{,}5(R_1 + R_2)$.

при $R_в \to 0$ формула (2-150а) преобразуется к виду

$$Э^{c(1)}_n = 2l^{(1)}_n/(2n+1), \qquad (2\text{-}150б)$$

что соответствует выражению (2-112а);

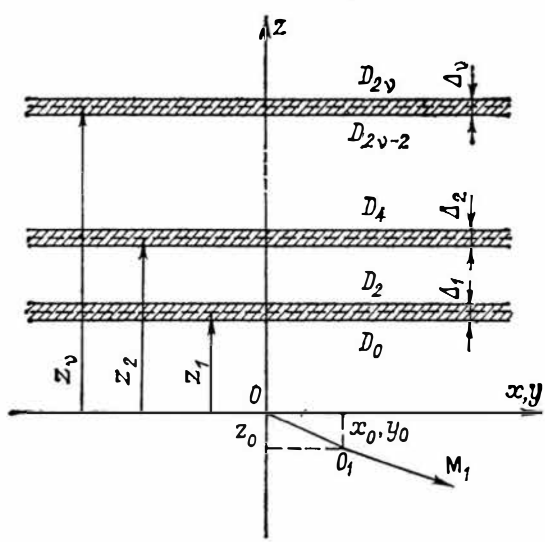


Рис. 2-26. Система тонкостенных пластин в дипольном магнитном поле

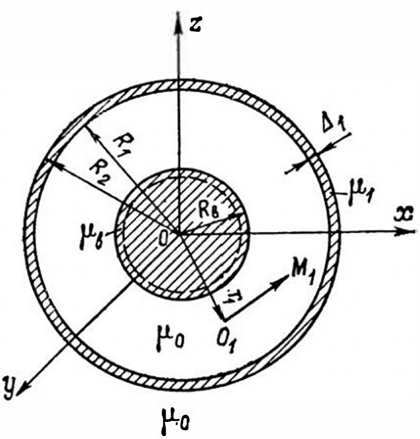


Рис. 2-27. Сферический экран с концентрическим металлическим включением в дипольном магнитном поле

2) оболочку со **сплошным** включением; используя метод расчета, представленный в § 2-1, из формул (2-21)—(2-23) при $q_1 \to \infty$ можно получить экранирующие функции

$$Э^{с(1)}_{n(в)} = \frac{(2n+1) + 2(p_1/R_0)\,n(n+1)}{(2n+1)\left[1 + (n/(n+1))\,p_{в,0}^{2n+1}\right]}; \tag{2-151а}$$

$$W^{с(1)}_{n(в)(l)} = \frac{2\left[p_{в,0}^{2n+1}(p_1/R_0)\,n^2 - n(n+1)(p_1/R_0)\right]}{2p_{в,0}^{2n+1}(p_1/R_0)\,n^2 + n\left[2(p_1/R_0)\,n(n+1) + (2n+1)\right]}. \tag{2-151б}$$

Формулы (2-151) получены при условии (1-47) для оболочки с металлическим включением; при $R_в \to 0$ формулы (2-151) преобразуются в (2-112), как и формулы (2-150).

Круговая цилиндрическая оболочка. На основании методики расчета, изложенной в § 2-1 для тонкостенной круговой цилиндрической оболочки с ферромагнитным включением, получим:

1) оболочку с **полым** включением; для иллюстрации воспользуемся рис. 2.28, где штриховой линией обозначена такая оболочка; формулы для экранирующих функций примут вид:

$$Э^{ц(1)}_{n,\lambda(в)} = \left\{\left[2n^3(p_1/R_1)\,a_1^{(1)}b_1^{(1)} - 1\right]\left[2n^3(p_в/R_в)\,a_1^{(в)}b_1^{(в)} - 1\right] - \left[p_1p_в/(R_1R_в)\right] n^3 a_1^{(в)\,2} b_1^{(1)\,2}\right\}\left[2n(p_в/R_в)\,a_1^{(в)}b_1^{(в)} - 1\right]^{-1}; \tag{2-152а}$$

$$\begin{aligned} W^{ц(1)}_{n,\lambda(в)} = &- \Big\{(p_в/R_в)\Big\{\left[b_2^{(1)} - (p_1/R_1)\,n^2 b_1^{(1)}\right] - \\ &- (p_1/R_1)\,n^3 b_1^{(1)\,2}\left[a_2^{(1)} + (p_1/R_1)\,n^2 a_1^{(1)}\right]\Big\} - \left[4(p_в/R_в)\,n^3 a_1^{(в)} b_1^{(в)} - 1\right] \times \\ &\times (p_1/R_1)\,a_1^{(1)}\left\{2b_1^{(1)}\left[a_2^{(1)} + (p_1/R_1)\,n^2 a_1^{(1)}\right] - 1\right\}\Big\} \times \\ &\times \Big\{\left(b_2^{(1)} + (p_1/R_1)\,n^2 b_1^{(1)}\right]\Big\{\left[2n^3(p_1/R_1)\,a_1^{(1)}b_1^{(1)} - 1\right] \times \\ &\times \left[2n^3(p_в/R_в)\,a_1^{(в)}b_1^{(в)} - 1\right] - (p_1p_в/R_1R_в)\,n^3 a_1^{(в)\,2} b_1^{(1)\,2}\Big\}\Big\}^{-1}, \end{aligned} \tag{2-152б}$$

где $a_1^{(j)} = I_m(\nu_j)$; $a_2^{(j)} = I'_m(\nu_j)$; $b_1^{(j)} = K_m(\nu_j)$; $b_2^{(j)} = K'_m(\nu_j)$; $\nu_j = |\lambda| R_j$, $j = \text{в}, 1$;

при $R_\text{в} \to 0$ формулы (2-152) преобразуются в ранее использованные (2-144) для однослойных круговых цилиндрических оболочек;

2) оболочку со сплошным включением (рис. 2-28); формулы для экранирующих функций

$$Э^{\text{ц}(1)}_{n,\,\lambda(\text{в})} = \left(a_1^{(1)} b_2^{(\text{в})} - a_2^{(\text{в})} b_1^{(1)}\right)^{-1} a_1^{(1)} \left\{2\,(p_1/R_1)\, n^3 a_2^{(1)} b_1^{(1)\,2} - \right.$$

$$\left. - b_2^{(\text{в})} R_1 \left[2\,(p_1/R_1)\, n^3 a_1^{(1)} b_1^{(1)} - 1\right]\right\}; \qquad (2\text{-}153\text{а})$$

$$W^{\text{ц}(1)}_{n,\,\lambda(\text{в})} = \left\{\left(b_1^{(1)}/a_1^{(1)}\right)\left\{\left\{(p_1/R_1)\, n^3 a_2^{(1)\,2} b_2^{(\text{в})} R_1 \left[b_2^{(1)} R_1 + (p_1/R_1)\, n^2 b_1^{(1)}\right] - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - a_2^{(\text{в})} \left\{2 a_2^{(1)} (p_1/R_1)\, n^3 b_1^{(1)} - \left[b_2^{(1)} R_1 - (p_1/R_1)\, n^2 b_1^{(1)}\right]\left(p_1/R_1\right) n^3 a_1^{(1)} b_1^{(1)} - 1\right]\right\}\right\}\right\}\right\} \times$$

$$\times \left\{\left[b_2^{(1)} R_1 + (p_1/R_1)\, n^2 b_1^{(1)}\right]\left\{2\,(p_1/R_1)\, n^3 a_2^{(1)} b_1^{(1)\,2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - b_2^{(\text{в})} R_1 \left[2\,(p_1/R_1)\, n^3 a_1^{(1)} b_1^{(1)} - 1\right]\right\}\right\}^{-1}; \qquad (2\text{-}153\text{б})$$

при $R_\text{в} \to 0$ формулы (2-153) преобразуются в (2-144), как и формулы (2-152).

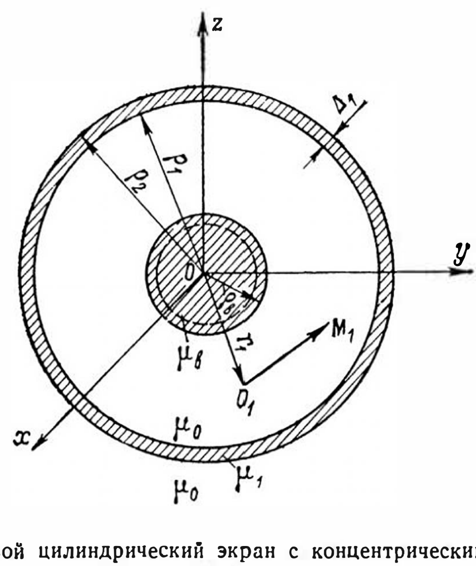


Рис. 2-28. Круговой цилиндрический экран с концентрическим металлическим включением в дипольном магнитном поле

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ОБОЛОЧКИ ПРОСТЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФОРМ В ПЕРЕМЕННОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

3-1. ОБЩИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА

Оболочки толстостенные. Под толстостенными оболочками, находящимися в переменном помехонесущем электромагнитном поле, понимают такие, толщина Δ_j которых превышает толщину поверхностного слоя δ_j $(\delta_j < \Delta_j)$. Для таких оболочек необходимо проводить интегрирование уравнений Максвелла внутри оболочек. Считаем, что поверхности экранирующих оболочек совпадают с полными координатными поверхностями. Каждая система оболочек состоит из однотипных оболочек: плоских, круговых цилиндрических, сферических.

Постановка задачи. Пусть в однородном изотропном пространстве находится ν концентрических (для плоских — параллельных) толстостенных оболочек, ограниченных координатными поверхностями $S_j(q_1 = \xi_j)$, $j \in [1;\ 2\nu]$ с центром в точке O (рис. 2-1). Назовем областью D_0 часть пространства, внутреннюю по отношению ко всем оболочкам и содержащую начало координат в точке O, областью D_j — пространство между поверхностями S_j и S_{j+1}, областью $D_{2\nu}$ — пространство, внешнее по отношению ко всем оболочкам. Каждая область D_j имеет магнитную проницаемость μ_j и электрическую проводимость γ_j, $j \in [0; 2\nu]$. Источник поля — низкочастотный магнитный диполь $D[\mathbf{M}_1, \mathbf{r}_1]$, расположенный в точке O_1 области D_0 и произвольно ориентированный в пространстве. Задача состоит в определении напряженности магнитных полей, возбуждаемых источником в каждой из областей D_j, а также в расчете экранирующих функций оболочек.

Описать переменное электромагнитное поле лишь скалярными потенциалами затруднительно. В материале оболочек возбуждаются вихревые токи, а поэтому необходимо вводить векторный магнитный потенциал или использовать уравнения непосредственно для составляющих напряженностей поля.

Метод решения. Пространство, в котором распространяется электромагнитное поле, разбивается на две группы областей: области D_0, D_2, ..., $D_{2\nu}$ содержат воздух, т. е. непроводящий электрический ток материал. Напряженность магнитного поля в этих средах может быть определена из уравнения Лапласа для скалярного потенциала $v^{(2j)}$ $(j \in [0;\ \nu])$:

$$v^{(2j)} = \sum_n \sum_m \left[x_{nm}^{(2j)} P_{nm}(q_1) + y_{nm}^{(2j)} F_{nm}(q_1)\right] Y_{nm}(q_2,\ q_3) \text{ — в области } D_{2j}, \tag{3-1}$$

где $x_{nm}^{(0)} = a_{nm}$, как и в (2-3); $y_{nm}^{(2\nu)} = 0$; n, m — параметры, пробегающие некоторые непрерывные или дискретные множества числовых значений (для непрерывных параметров знаки сумм заменяются на интегралы). Используя потенциалы $v^{(2j)}$, определяют составляющие напряженности поля по координатам q_β $(\beta = 1,\ 2,\ 3)$:

$$\mathbf{H}_{q_\beta}^{(2j)} = -\frac{1}{h_{q_\beta}} \frac{\partial v^{(2j)}}{\partial q_\beta}. \tag{3-2}$$

Области $D_1,\ D_3,\ \ldots,\ D_{2\nu-1}$ содержат металл, где переменное магнитное поле необходимо описывать с помощью векторного магнитного потенциала $\mathbf{A}^{(2j-1)}$ $(j \in [1;\ \nu])$, который находят из уравнения

$$\Delta \mathbf{A}^{(2j-1)} = \gamma_{2j-1} \mu_{2j-1}\, \partial \mathbf{A}^{(2j-1)}/\partial t. \tag{3-3}$$

Фундаментальное решение уравнения (3-3) находится с помощью специальных методов в конкретных системах координат. Сложность его решения заключается в том, что составляющие векторного потенциала $\mathbf{A}_{q_\beta}^{(2j-1)}$ по координатным осям q_β $(\beta = 1,\ 2,\ 3)$ не могут быть выделены в отдельные уравнения (за исключением декартовой системы координат). Если учесть, что две составляющие из трех взимосвязаны, равно как и граничные условия на разделяющих поверхностях, то разделение при определенных условиях достигается, а составляющие векторного потенциала записываются в виде

$$\mathbf{A}_{q_\beta}^{(2j-1)}(q_1,\ q_2,\ q_3) = \sum_n \sum_m \mathbf{D}_{2j-1}^{\beta}(\lambda_n,\ \tau_m)\, X_{1(2j-1)}^{\beta}(\lambda_n,\ \tau_m,\ q_1) \times$$
$$\times X_{2(2j-1)}^{\beta}(\lambda_n,\ \tau_m,\ q_2)\, X_{3(2j-1)}^{\beta}(\lambda_n,\ \tau_m,\ q_3), \quad \beta = 1,\ 2,\ 3, \tag{3-4}$$

где $\mathbf{D}_{2j-1}^{\beta}$ — постоянные интегрирования, подлежащие определению; $X_{1(2j-1)}^{\beta}$; $X_{2(2j-1)}^{\beta}$; $X_{3(2j-1)}^{\beta}$ — разделенные решения по координатам q_β; λ_n, τ_m — собственные числа задачи; n, m — параметры.

Составляющие напряженности магнитного поля $\mathbf{H}_{q_\beta}^{(2j-1)}$ находятся в виде

$$\mathbf{H}_{q_\beta}^{(2j-1)} = \frac{1}{\mu_{2j-1}} \operatorname{rot} \mathbf{A}^{(2j-1)}. \tag{3-5}$$

Результаты решения. Составляющие напряженности магнитного поля $\mathbf{H}_{q_\beta}^{(2j)}$ и $\mathbf{H}_{q_\beta}^{(2j-1)}$ сопрягаются на граничных поверхностях при учете регулярности решений в бесконечности и ограниченности в начале координат. Из полученной системы уравнений определяются $x_{nm}^{(2j)}$, $y_{nm}^{(2j)}$, $\mathbf{D}_{2j-1}^{\beta}$ и с их помощью — эффективности экранирования и функции обратного действия:

$$Э_{q_\beta}^{s\nu} = \mathbf{H}_{q_\beta}^{(0)}/\mathbf{H}_{q_\beta}^{(\nu)}; \quad W_{q_\beta}^{s\nu} = \mathbf{H}_{q_\beta}^{(1)}/\mathbf{H}_{q_\beta}^{(0)}, \quad \beta = 1,\ 2,\ 3. \tag{3-6}$$

В заключение необходимо отметить, что представленный метод решения, кроме декартовой системы координат, применяется с некоторыми ограничениями для круговой цилиндрической и сферической систем координат [1]. Когда разделение для составляющих векторного магнитного потенциала затруднено, делаются допущения, позволяющие пренебречь той или иной составляющей векторного потенциала. Как показывают исследования, такие допущения не вносят существенных погрешностей в расчеты [2]. Как правило, пренебрегают поперечной составляющей векторного магнитного потенциала в материале оболочки, что облегчает задачу разделения векторных уравнений. Метод решения при этом не претерпевает принципиальных усложнений.

Строгое решение предусматривает использование лишь векторного потенциала (в воздухе и в оболочке). При переходе от векторного потенциала к скалярному, т. е. от вихревых полей к потенциальным, исключаются такие особенности, как возникновение нормальных волн разных гармоник в воздушных прослойках экрана, боковых волн на поверхности внешней среды, асимптотически уменьшающихся при удалении от поверхности оболочки.

Оболочки тонкостенные. Под тонкостенными оболочками понимают такие, толщина Δ_j которых меньше толщины поверхностного слоя δ_j ($\delta_j > \Delta_j$). В этом случае электромагнитные процессы внутри материала оболочки детально не исследуются, а внутренние и внешние по отношению к соответствующей оболочке поля сопрягаются с помощью эквивалентных граничных условий. Считаем, что экранирующие оболочки совпадают с полными координатными поверхностями. Каждая система оболочек состоит из однотипных оболочек: плоских, круговых цилиндрических, сферических.

Постановка задачи. Пусть в однородном изотропном пространстве находятся ν концентрических тонкостенных оболочек, совпадающих с координатными поверхностями $S_j(q_1 = \xi_j)$, $j \in \in [1; \nu]$, с центром в точке O (рис. 2-2). Назовем областью D_0 часть пространства, внутреннюю по отношению ко всем оболочкам и содержащую начало координат в точке O, областью D_j — пространство между поверхностями S_j и S_{j+1}, областью D_ν — пространство, внешнее по отношению ко всем оболочкам. Все области D_j имеют параметры μ_0; $\gamma_0 = 0$; $j \in [0; 2\nu]$. Материал каждой из оболочек S_j ($j \in [1; \nu]$) имеет параметры μ_j и γ_j. Источник поля — низкочастотный магнитный диполь $D[\mathbf{M}_1, \mathbf{r}_1]$, расположенный в точке O области D_0 и произвольно ориентированный в пространстве. Задача состоит в определении напряженности электромагнитных полей, возбуждаемых источником в каждой области D_j, а также в расчете экранирующих функций оболочек.

Решение задачи сводится к нахождению скалярных потенциалов v_j в областях D_j из уравнения Лапласа (1-16), к которому добавляются граничные условия, накладываемые на v_j [2, 7]:

$$\left.\frac{\partial v_{j+1}}{\partial q_1}\right|_{q_1=\xi_{j+1}} = -F\left[t_{j+1}^- v_{j+1} + t_{j+1}^+ v_j\right]\Big|_{q_1=\xi_{j+1}};$$

$$\left.\frac{\partial v_j}{\partial q_1}\right|_{q_1=\xi_{j+1}} = F\left[t_{j+1}^+ v_{j+1} + t_{j+1}^- v_j\right]\Big|_{q_1=\xi_{j+1}}, \quad j\in[0;\ \nu-1], \tag{3-7}$$

где $p_j=\mu_j\Delta_j/(2\mu_0)$; $q_j=2/(i\omega\mu_0\gamma_j\Delta_j)$; $t_j^-=(p_j-q_j)/2$; $t_j^+=(p_j+q_j)/2$; $\xi_1<\xi_2<\ \ldots\ <\xi_\nu$; Δ_j — толщина оболочки S_j.

Метод решения. Граничные поверхности S_j совпадают с координатными поверхностями ортогональной криволинейной системы координат (q_1, q_2, q_3), поэтому решения уравнений в области D_j находятся в виде суперпозиции частных решений уравнения Лапласа:

$$v_j = \sum_n \sum_m \left[x_{nm}^{(j)} P_{nm}(q_1) + y_{nm}^{(j)} F_{nm}(q_1)\right] Y_{nm}(q_2, q_3), \quad j\in[0;\ \nu], \tag{3-8}$$

где $x_{nm}^{(0)}=a_{nm}$ заданы и зависят от напряженности поля диполя, помещенного в область D_0; $y_{nm}^{(\nu)}=0$; n, m — параметры; $F_{nm}(q_1)$ и $P_{nm}(q_1)$ — координатные функции первого и второго рода.

Действие граничного оператора F на базисные функции в декартовых, цилиндрических и сферических координатах определено правилами [2]:

$$F\left[f(q_1)\,Y_{nm}(q_2, q_3)\right]\Big|_{q_1=\xi_j} = G_{nm}^{s(j)} f(\xi_j)\,Y_{nm}(q_2, q_3), \tag{3-9}$$

где $f(q_1)=F_{nm}(q_1)$, $P_{nm}(q_1)$; S_j — вид j-й оболочки.

Результаты решения. Подставляя потенциалы (3-8) в граничные условия (3-7), используя соотношения (3-9), решение задачи экранирования сводим к решению системы алгебраических уравнений относительно $x_{nm}^{(j)}$, $y_{nm}^{(j)}$:

$$\begin{gathered}
x_{nm}^{(j+1)}\left[P'_{nm}(\xi_{j+1}) + t_{j+1}^- G_{nm}^{s(j+1)} P_{nm}(\xi_{j+1})\right] + \\
+\, y_{nm}^{(j+1)}\left[F'_{nm}(\xi_{j+1}) + t_{j+1}^- G_{nm}^{s(j+1)} F_{nm}(\xi_{j+1})\right] = \\
= -t_{j+1}^+ G_{nm}^{s(j+1)}\left[x_{nm}^{(j)} P_{nm}(\xi_{j+1}) + y_{nm}^{(j)} F_{nm}(\xi_{j+1})\right]; \\
t_{j+1}^+ G_{nm}^{s(j+1)} P_{nm}(\xi_{j+1})\, x_{nm}^{(j+1)} + t_{j+1}^+ G_{nm}^{s(j+1)} F_{nm}(\xi_{j+1})\, y_{nm}^{(j+1)} = \\
= x_{nm}^{(j)}\left[P'_{nm}(\xi_{j+1}) - t_{j+1}^- G_{nm}^{s(j+1)} P_{nm}(\xi_{j+1})\right] + \\
+\, y_{nm}^{(j)}\left[F'_{nm}(\xi_{j+1}) - t_{j+1}^- G_{nm}^{s(j+1)} F_{nm}(\xi_{j+1})\right].
\end{gathered} \tag{3-10}$$

Разрешая систему уравнений (3-10) относительно $x_{nm}^{(j+1)}$, $y_{nm}^{(j+1)}$, определим

$$\begin{gathered}
x_{nm}^{(j+1)} = A_{j+1}^{11}(n, m)\, x_{nm}^{(j)} + A_{j+1}^{12}(n, m)\, y_{nm}^{(j)}; \\
y_{nm}^{(j+1)} = A_{j+1}^{21}(n, m)\, x_{nm}^{(j)} + A_{j+1}^{22}(n, m)\, y_{nm}^{(j)}
\end{gathered}$$

или в матричной форме

$$\mathbf{X}_{nm}^{(j+1)} = A_{j+1}(n, m)\,\mathbf{X}_{nm}^{(j)}, \qquad j \in [0;\ \nu - 1], \tag{3-11}$$

где

$$A_{j+1}^{11}(n, m) = \zeta_{j+1}\left[p_{j+1}q_{j+1}\left(G_{nm}^{s(j+1)}\right)^2 P_{nm}(\xi_{j+1})\,F_{nm}(\xi_{j+1}) + \right.$$
$$\left. + P'_{nm}(\xi_{j+1})\,F'_{nm}(\xi_{j+1}) - t_j^- G_{nm}^{s(j+1)}\Delta_{j+1}\right]; \quad \zeta_{j+1} = 1/\left(t_{j+1}^+ G_{nm}^{s(j+1)}\Delta_{j+1}\right);$$
$$A_{j+1}^{12}(n, m) = \zeta_{j+1}\left\{p_{j+1}q_{j+1}\left[G_{nm}^{s(j+1)}F_{nm}(\xi_j)\right]^2 + \left[F'_{nm}(\xi_{j+1})\right]^2\right\};$$
$$A_{j+1}^{21}(n, m) = \zeta_{j+1}\left\{\left[P'_{nm}(\xi_{j+1})\right]^2 + p_{j+1}q_{j+1}\left[G_{nm}^{s(j+1)}P_{nm}(\xi_{j+1})\right]^2\right\};$$
$$A_{j+1}^{22}(n, m) = -\zeta_{j+1}\left[F'_{nm}(\xi_{j+1})\,P'_{nm}(\xi_{j+1}) + \right.$$
$$\left. + t_{j+1}^- G_{nm}^{s(j+1)}\Delta_{j+1} + p_{j+1}q_{j+1}\left(G_{nm}^{s(j+1)}\right)^2 F_{nm}(\xi_{j+1})\,P_{nm}(\xi_{j+1})\right];$$
$$\Delta_{j+1} = F'_{nm}(\xi_{j+1})\,P_{nm}(\xi_{j+1}) - F_{nm}(\xi_{j+1})\,P'_{nm}(\xi_{j+1});$$
$$\mathbf{X}_{nm}^{(j+1)} = \begin{pmatrix} x_{nm}^{(j)} \\ y_{nm}^{(j)} \end{pmatrix}; \quad A_{j+1}(n, m) = \begin{pmatrix} A_{j+1}^{11}(n, m) & A_{j+1}^{12}(n, m) \\ A_{j+1}^{21}(n, m) & A_{j+1}^{22}(n, m) \end{pmatrix}.$$

Последовательно применяя (3-11), определим

$$\mathbf{X}_{nm}^{(\nu)} = B_\nu(n, m)\,\mathbf{X}_{nm}^{(0)}, \tag{3-12}$$

где

$$B_\nu(n, m) = A_\nu(n, m)\,A_{\nu-1}(n, m)\ \ldots\ A_1(n, m);$$
$$B_\nu(n, m) = \begin{pmatrix} B_\nu^{11} & B_\nu^{12} \\ B_\nu^{21} & B_\nu^{22} \end{pmatrix}.$$

Распишем (3-12) покомпонентно, тогда

$$\begin{aligned} x_{nm}^{(\nu)} &= B_\nu^{11}x_{nm}^{(0)} + B_\nu^{12}y_{nm}^{(0)}; \\ y_{nm}^{(\nu)} &= B_\nu^{21}x_{nm}^{(0)} + B_\nu^{22}y_{nm}^{(0)}. \end{aligned} \tag{3-13}$$

Учитывая, что для нашей задачи $y_{nm}^{(\nu)} = 0$ и $x_{nm}^{(0)} = a_{nm}$,

$$y_{nm}^{(0)} = -\frac{B_\nu^{21}(n, m)}{B_\nu^{22}(n, m)}\,a_{nm}; \quad x_{nm}^{(\nu)} = \frac{a_{nm}}{B_\nu^{22}(n, m)}, \tag{3-14}$$

поскольку определитель $|B_\nu| = 1$. Формулы для нахождения экранирующих функций записываются в виде (2-20) после преобразований, аналогичных выражениям (2-21). Здесь в качестве функций используются: $G_{mn}^{(j)} = (\tilde{p}_j + \tilde{q}_j)\,\Delta\left(a_1^{(j)};\ b_1^{(j)}\right)$; $\Delta\left(a_1^{(j)};\ b_1^{(j)}\right)$ — определитель Вронского $\left[\Delta_j \equiv \Delta\left(a_1^{(j)};\ b_1^{(j)}\right) \equiv \Delta_j(n, m)\right]$;

$$\begin{aligned} l_{mn}^{(j)} &= 2a_2^{(j)}b_2^{(j)} + (\tilde{p}_j - \tilde{q}_j)\,\Delta\left(a_1^{(j)};\ b_1^{(j)}\right) + 2\tilde{p}_j\tilde{q}_j a_1^{(j)}b_1^{(j)}; \\ L_{mn}^{(j)} &= 2a_2^{(j)2} + 2\tilde{p}_j\tilde{q}_j a_1^{(j)2}; \\ d_{mn}^{(j)} &= 2b_2^{(j)2} + 2\tilde{p}_j\tilde{q}_j b_1^{(j)2}; \quad \tilde{q}_j = \chi d q_j; \quad \tilde{p}_j = \chi d p_j. \end{aligned} \tag{3-15}$$

Из общих формул (2-21) и (3-15) можно получить формулы для экранирующих функций любого числа оболочек.

Однослойная оболочка. При $\nu = 1$

$$Э^{s\,(1)}_{nm} = \frac{2\tilde{p}_1\tilde{q}_1 a_1^{(1)} b_1^{(1)} + (\tilde{p}_1 - \tilde{q}_1)\,\Delta\left(a_1^{(1)};\, b_1^{(1)}\right) + 2a_2^{(1)} b_2^{(1)}}{(\tilde{p}_1 + \tilde{q}_1)\,\Delta\left(a_1^{(1)}\cdot\, b_1^{(1)}\right)}; \quad (3\text{-}16а)$$

$$W^{s\,(1)}_{nm\,(a)} = -\frac{\left(2a_2^{(1)\,2} + 2\tilde{p}_1\tilde{q}_1 a_1^{(1)\,2}\right)\left(b_1^{(1)}/a_1^{(1)}\right)}{2\tilde{p}_1\tilde{q}_1 a_1^{(1)} b_1^{(1)} + (\tilde{p}_1 - \tilde{q}_1)\,\Delta\left(a_1^{(1)};\, b_1^{(1)}\right) + 2a_2^{(1)} b_2^{(1)}}. \quad (3\text{-}16б)$$

Формулы (3-16) соответствуют приведенным в работе [1].

Двухслойная оболочка. Для $\nu = 2$ формулы соответствуют (2-23) при функциях, подставляемых из (3-15) с заменой $G_{mn}^{(j)}$ на $\Delta_j(nm)$.

Трехслойная оболочка. Для $\nu = 3$ формулы соответствуют (2-24) при функциях, подставляемых из (3-15) с заменой $G_{mn}^{(j)}$ на $\Delta_j(n, m)$.

Оболочки с концентрическим массивным включением. Подобные задачи возникают при расчете напряженности электромагнитных полей транспортных энергоустановок, где из-за ограниченности пространства приходится размещать электрооборудование и значительные ферромагнитные массы в полости оболочек в непосредственной близости от обслуживающего персонала. Появляется необходимость в качественной и количественной оценках влияния металлических тел на перераспределение электромагнитных полей.

Постановка задачи. Пусть в однородном изотропном пространстве находятся ν концентрических тонкостенных оболочек, совпадающих с координатными поверхностями S_j $(q_1 = \xi_j)$, $j \in [1;\, \nu]$, и металлическое тело, ограниченное координатной поверхностью S_0 $(q_1 = \xi_0)$ и содержащееся внутри всех ν оболочек (рис. 3-1). Металлическое тело может быть как сплошным, так и полым. Назовем областью D_j пространство между

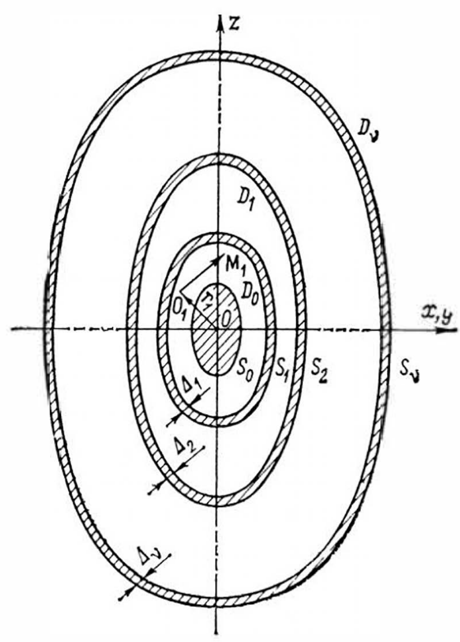


Рис. 3-1. Система концентрических тонкостенных оболочек, ограниченных координатными поверхностями, с металлическим включением в дипольном магнитном поле

поверхностями S_j и S_{j+1} ($j \in [0;\ \nu-1]$), областью D_ν — пространство, внешнее по отношению ко всем оболочкам. Все области D_j имеют параметры μ_0 и $\gamma_0 = 0$, а материал каждой оболочки S_j — μ_j и γ_j ($j \in [0;\ \nu]$). Источник поля — низкочастотный магнитный диполь $D[\mathbf{M}_1,\ \mathbf{r}_1]$, расположенный в точке O_1 области D_0 между массивным телом и оболочкой S_1. Задача состоит в определении напряженности электромагнитных полей, возбуждаемых источником в каждой из областей D_j, а также в расчете экранирующих функций оболочек.

Решение задачи сводится к нахождению скалярных потенциалов v_j в области D_j из уравнения Лапласа (1-16), к которому добавляются условия (3-7) на S_j ($j \in [1;\ \nu]$) и граничное условие Леонтовича М. А. [см. выражение (1-43)] на поверхности S_0 массивного тела:

$$\frac{\partial v_0}{\partial q_1}\bigg|_{q_1=\xi_0} = \frac{1}{\alpha_0} F(v_0)\,\big|_{q_1=\xi_0}, \tag{3-17}$$

где $\alpha_0 = (1+i)\left[\omega\mu_0^2\gamma_в/(2\mu_в)\right]^{1/2}$; $\mu_в$ и $\gamma_в$ — магнитная проницаемость и электрическая проводимость металлического тела; в условии (3-17) взят знак «$+$», так как координата q_1 возрастает в сторону, противоположную оболочке S_0, ограничивающей металлическое тело. На потенциал v_ν накладывается также условие в бесконечности (1-19).

Метод решения. Граничные поверхности S_j совпадают с полными координатными поверхностями системы координат (q_1, q_2, q_3), поэтому решения уравнения для области D_j находятся в виде суперпозиции частных решений уравнения Лапласа:

$$v_j = \sum_n \sum_m \left[x_{nm}^{(j)} P_{nm}(q_1) + y_{nm}^{(j)} F_{nm}(q_1)\right] Y_{nm}(q_2,\ q_3). \tag{3-18}$$

Потенциал v_0 в области D_0 имеет более сложную структуру:

$$v_0 = v^{(0)} + u_0 + w_0,$$

где $v^{(0)}$ — потенциал поля диполя; u_0 — потенциал поля, обусловленного наличием металлического тела, ограниченного оболочкой S_0; w_0 — потенциал поля, обусловленного оболочкой S_1. Таким образом,

$$\begin{aligned} u_0 &= \sum_n \sum_m z_{nm}^{(0)} P_{nm}(q_1) Y_{nm}(q_2,\ q_3); \\ w_0 &= \sum_n \sum_m y_{nm}^{(0)} F_{nm}(q_1) Y_{nm}(q_2,\ q_3). \end{aligned} \tag{3-19}$$

Поле диполя $v^{(0)}$ может быть представлено через координатные функции по-разному, в зависимости от области представления:

в окрестности оболочки S_1

$$v^{(0)} = \sum_n \sum_m a_{nm} P_{nm}(q_1) Y_{nm}(q_2,\ q_3); \tag{3-20}$$

в окрестности оболочки S_0

$$v^{(0)}=\sum_n \sum_m b_{nm}F_{nm}(q_1)Y_{nm}(q_2,\ q_3). \qquad (3\text{-}21)$$

В результате потенциал $v^{(0)}$ в окрестности поверхности S_1 представляется в форме (3-18):

$$v^{(0)}=\sum_n \sum_m \left[x^{(0)}_{nm}P_{nm}(q_1)+y^{(0)}_{nm}F_{nm}(q_1)\right]Y_{nm}(q_2,\ q_3), \qquad (3\text{-}22)$$

где $x^{(0)}_{nm}=z^{(0)}_{nm}+a_{nm}$.

В окрестности S_0 имеет место представление

$$v^{(0)}=\sum_n \sum_m \left[z^{(0)}_{nm}P_{nm}(q_1)+\left(y^{(0)}_{nm}+b_{nm}\right)F_{nm}(q_1)\right]Y_{nm}(q_2,\ q_3). \qquad (3\text{-}23)$$

Результаты решения. Подставляя потенциалы (3-18) и (3-22) в формулу (3-7), получим соотношения (3-19), которые преобразуются к (3-23). Полагая $y^{(\nu)}_{nm}=0$, $x^{(0)}_{nm}=z^{(0)}_{nm}+a_{nm}$, получим

$$\begin{aligned} &B^{11}_\nu\left(z^{(0)}_{nm}+a_{nm}\right)+B^{12}_\nu y^{(0)}_{nm}=x^{(\nu)}_{nm};\\ &B^{21}_\nu\left(z^{(0)}_{nm}+a_{nm}\right)+B^{22}_\nu y^{(0)}_{nm}=0. \end{aligned} \qquad (3\text{-}24)$$

Удовлетворим условию (3-17) на поверхности S_0. Подставляя выражение (3-23) в (3-17) и используя (3-1), получим

$$\begin{aligned} &z^{(0)}_{nm}P'_{nm}(\xi_0)+\left(y^{(0)}_{nm}+b_{nm}\right)F'_{nm}(\xi_0)=\\ &=\left(G^{s\,(0)}_{nm}/\alpha_0\right)\left[z^{(0)}_{nm}P_{nm}(\xi_0)+\left(y^{(0)}_{nm}+b_{nm}\right)F_{nm}(\xi_0)\right]. \end{aligned} \qquad (3\text{-}25)$$

Разрешим совместно второе уравнение (3-24) и уравнение (3-25) относительно $z^{(0)}_{nm}$ и $y^{(0)}_{nm}$:

$$\begin{aligned} z^{(0)}_{nm}&=d^{-1}_{nm}\left[b_{nm}B^{22}_\nu-a_{nm}B^{21}_\nu\right]\left[-\alpha_0F'_{nm}(\xi_0)+G^{s\,(0)}_{nm}F_{nm}(\xi_0)\right];\\ y^{(0)}_{nm}&=d^{-1}_{nm}\left\{a_{nm}\left[-\alpha_0P'_{nm}(\xi_0)+G^{s\,(0)}_{nm}P_{nm}(\xi_0)\right]-\right.\\ &\left.-b_{nm}\left[-\alpha_0F'_{nm}(\xi_0)+G^{s\,(0)}_{nm}F_{nm}(\xi_0)\right]\right\}B^{21}_\nu;\\ d_{nm}&=B^{21}_\nu\left[-\alpha_0F'_{nm}(\xi_0)+G^{s\,(0)}_{nm}F_{nm}(\xi_0)\right]-\\ &-B^{22}_\nu\left[-\alpha_0P'_{nm}(\xi_0)+G^{s\,(0)}_{nm}P_{nm}(\xi_0)\right]. \end{aligned} \qquad (3\text{-}26)$$

Из первого уравнения (3-24) определим коэффициенты $x^{(\nu)}_{nm}$, которые позволяют найти эффективность экранирования

$$Э^{s\,(\nu)}_{n,\,m\,(в)}=\left[B^{11}_\nu\left(1+\frac{z^{(0)}_{nm}}{a_{nm}}\right)+B^{12}_\nu\frac{y^{(0)}_{nm}}{a_{nm}}\right]^{-1}. \qquad (3\text{-}27)$$

Функции обратного действия описываются различными формулами в зависимости от области рассмотрения. Для вычисления функции обратного действия в окрестности S_1 возьмем отношение одинаковых гармоник для потенциалов (3-22) и (3-20). В результате

$$W_{nm}^{s(1)}(S_1) = \frac{z_{nm}^{(0)}}{a_{nm}} + \frac{y_{nm}^{(0)} F_{nm}(\xi_1)}{a_{nm} P_{nm}(\xi_1)}. \tag{3-28}$$

Взяв отношение одинаковых гармоник для потенциалов (3-23) и (3-21), выведем формулу для функций обратного действия в окрестности поверхности S_0 массивного включения

$$W_{nm}^{s(1)}(S_{(}) = \frac{y_{nm}^{(0)}}{b_{nm}} + \frac{z_{nm}^{(0)} P_{nm}(\xi_1)}{b_{nm} F_{nm}(\xi_1)}. \tag{3-29}$$

После подстановки коэффициентов (3-26) в формулу (3-27) получим развернутую формулу

$$Э_{n,\,m\,(в)}^{s\,(1)} = d_{nm} \frac{a_{nm}}{b_{nm}} \left\{ \left[\alpha_0 P'_{nm}(\xi_0) - G_{nm}^{s\,(0)} P_{nm}(\xi_0) \right] - \right.$$

$$\left. - \left[\alpha_0 F'_{nm}(\xi_0) - G_{nm}^{s\,(0)} F_{nm}(\xi_0) \right] \right\}^{-1}. \tag{3-30}$$

Коэффициенты a_{nm} и b_{nm} зависят от напряженности поля диполя $D[\mathbf{M}_1, \mathbf{r}_1]$.

Оболочки при резко выраженном поверхностном эффекте. Пусть область D_0 в пространстве ограничена оболочкой S, которая совпадает с полной координатной поверхностью некоторой системы координат (q_1, q_2, q_3) и описывается уравнением $q_1 = \xi' - \mathrm{const}$, и пусть введенная система координат имеет начало в точке O, расположенной в полости оболочки D_0. Будем считать, что оболочка S выполнена из материала с параметрами μ и γ, а область D_0 имеет параметры μ_0 и $\gamma_0 = 0$.

Источник поля — низкочастотный магнитный диполь $D[\mathbf{M}_1, \mathbf{r}_1]$, помещенный в точке O_1 области D_0 и произвольно ориентированный в пространстве. Когда оболочка S — массивная при резко выраженном в ней поверхностном эффекте, полем в материале оболочки можно пренебречь.

Решение сформулированной задачи для низкочастотных полей сводится к нахождению из уравнения Лапласа скалярного магнитного потенциала v, для которого на поверхности S $(q_1 = \xi_1)$ выполнено приближенное граничное условие (3-17):

$$(\partial v / \partial q_1)\big|_{q_1 = \xi_1} = -(1/\alpha)\, F(v)\big|_{q_1 = \xi_1}, \tag{3-31}$$

где $\alpha = (1 + i)\left[\omega \mu_0^2 \gamma / (2\mu)\right]^{1/2}$.

Решение уравнения (1-16) для области D_0 представим в виде суперпозиции частных решений уравнений Лапласа, найденных методом разделения переменных в координатах (q_1, q_2, q_3):

$$v = \sum_n \sum_m \left[a_{nm} P_{nm}(q_1) + y_{nm} F_{nm}(q_1) \right] Y_{nm}(q_2, q_3), \tag{3-32}$$

где a_{nm} — известные постоянные интегрирования, зависящие от параметров диполя $D[\mathbf{M}_1, \mathbf{r}_1]$; коэффициент y_{nm} подлежит определению из граничного условия. Подставим потенциалы (3-32) в (3-31) и воспользуемся формулой для граничного оператора F:

$$F\left[f(q_1)\, Y_{nm}(q_2,\ q_3)\right] = G^s_{nm} f(q_1)\, Y_{nm}(q_2,\ q_3),$$

где $f(q_1) = F_{nm}(q_1),\ P_{nm}(q_1)$.

В результате для функций обратного действия получим

$$W^{s\,(1)}_{nn\,(a)} = -\frac{\left[G^s_{nm} F_{nm}(\xi_1) + \alpha F'_{nm}(\xi_1)\right] P_{nm}(\xi_1)}{\left[G^s_{nm} P_{nm}(\xi_1) + \alpha P'_{nm}(\xi_1)\right] F_{nm}(\xi_1)}. \tag{3-33}$$

Анализ расчетных методов. Представленные здесь методы расчета толстостенных и тонкостенных оболочек при падении на них низкочастотных квазистатических полей имеют те же погрешности, что и рассмотренные в § 2-1.

Применимость метода для расчета тонкостенных экранирующих оболочек должна быть изучена при проведении численных расчетов в конкретных системах координат и путем сопоставления с результатами экспериментов.

В заключение следует отметить, что экранирующие оболочки, используемые в инженерной практике, как правило, удовлетворяют условиям, определенным для тонкостенных оболочек. Кроме того, при не слишком высоких частотах ($f < 10^5$ Гц) соотнесение параметров оболочек конечной толщины с параметрами тонкостенных оболочек не приводит к значительным погрешностям дифрагированного и прошедшего через оболочку полей, а поэтому считается корректным [1, 2].

3-2. ОДНОРОДНЫЕ ПОЛЯ

Сферические оболочки.

Сферы толстостенные. Методология расчета толстостенных оболочек, представленная в § 3-1, не является универсальной. Для каждого из видов оболочек она имеет свои особенности.

Сферы однослойные.

Если пренебречь радиальной составляющей напряженности электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{E}_r = 0,\ \mathbf{E}_\theta,\ \mathbf{E}_\varphi)$ [1], то при расчете экранирующих функций сферической оболочки, находящейся в однородном пульсирующем электромагнитном поле с амплитудой напряженности $\mathbf{H}^{(0)}$ (рис. 2-3, где $R_3, \ldots, R_{2\nu} \to \infty$), можно воспользоваться выражениями [1]

$$\text{Э}^{c\,(1)} = \left[1/\left(3p^3_{2,\,1}\right)\right]\left\{(2p_{2,\,1} + 1)\,\mathrm{ch}\,(\alpha\Delta_1) + \left[(2/K) + Kp_{2,\,1}\right]\mathrm{sh}\,(\alpha\Delta_1)\right\}; \tag{3-34а}$$

$$W^{c\,(1)}_{(i)} = \left[2/\left(3p^3_{2,\,1}\right)\right]\left[(Kp_{2,\,1} - 1/K)\,\mathrm{sh}\,(\alpha\Delta_1) - (p_{2,\,1} - 1)\,\mathrm{ch}\,(\alpha\Delta_1)\right]\left(\text{Э}^{c\,(1)}\right)^{-1}, \tag{3-34б}$$

где $K=(\alpha/\nu_{1,0})R_1$; $p_{2,1}=R_2/R_1$; $\alpha=[k^2+(2/R_1^2)]^{1/2}$; $k=(i\omega\mu_1\gamma_1)^{1/2}$ — волновое число; μ_1 и γ_1 — магнитная проницаемость и электрическая проводимость материала экрана; Δ_1 — толщина оболочки; R_1, R_2 — радиусы сферы.

Если считать экран тонкостенным и положить $p_{2,1}\to 1$, то выражения (3-34) упрощаются:

$$Э^{c(1)}=\left(1/p_{2,1}^3\right)\{\operatorname{ch}\alpha\Delta_1+(1/3)[(2/K)+K]\operatorname{sh}\alpha\Delta_1\};\qquad(3\text{-}35а)$$

$$W_{(i)}^{c(1)}=\left[2/\left(3p_{2,1}^3\right)\right][K-(1/K)]\operatorname{sh}\alpha\Delta_1\left(Э^{c(1)}\right)^{-1}.\qquad(3\text{-}35б)$$

При $p_{2,1}=1$ получаются выражения, ранее использованные в работе [10].

Из анализа формул (3-34) и (3-35) следует:

а) для сферического экрана поле однородно; эффективность экранирования является комплексным числом;

б) влияние сферического экрана на внешнее поле эквивалентно действию диполя, помещенного в центр сферы.

При низких частотах приемлема следующая формула для расчета эффективности экранирования:

$$Э^{c(1)}=\left(1/p_{1,2}^2\right)\{1+(2/3)(\Delta_1/R_1)[(\nu_{1,0}-2)+\nu_{0,1}]+$$
$$+(1/3)k^2R_1\Delta_1\nu_{0,1}\},\qquad(3\text{-}36)$$

где $\nu_{\alpha,\beta}=\mu_\alpha/\mu_\beta$; $k^2=i\omega\mu_1\gamma_1$; $p_{1,2}=R_1/R_2$.

Из этой формулы при $\omega\to 0$ получаем уже известное выражение (2-25а).

Если представить $p_{1,2}^2\approx 1-2(\Delta_1/R_1)+\dots$, то для тонкостенных оболочек получим

$$Э^{c(1)}=1+\frac{2}{3}\frac{(\nu_{1,0}-1)^2}{\nu_{1,0}}(\Delta_1/R_1)+\frac{1}{3}i\omega\gamma_1R_1\Delta_1\mu_0.\qquad(3\text{-}37)$$

При $\omega\to 0$ формула (3-37) переходит в (2-29), если $\nu_{1,0}\gg 1$.

Если $\nu_{1,0}\to 1$, т. е. в качестве материала экрана используется проводящий немагнитный, то для толстостенной сферической оболочки эффективность экранирования [36]

$$Э^{c(1)}=\frac{1}{3}(\alpha R_1)^2\,p_{1,2}^{0,5}\left[I_{-1/2}(\alpha R_2)K_{-5/2}(\alpha R_1)-K_{-1/2}(\alpha R_2)I_{-5/2}(\alpha R_1)\right],$$
$$(3\text{-}38)$$

где $I_j(\alpha R_\beta)$ и $K_j(\alpha R_\beta)$ (при $j=-1/2$; $-5/2$; $\beta=1, 2$) — модифицированные цилиндрические функции первого и второго рода; $\alpha=(1+i)\delta$.

Формула (3-38) может быть преобразована для тонкостенных оболочек при низких частотах. Считая $\alpha R_2=\alpha(R_1+\Delta_1)$, используя разложение модифицированных цилиндрических функций в ряды около значения αR_1, получим

$$I_{-1/2}(\alpha R_2)\,K_{-5/2}(\alpha R_1) - K_{-1/2}(\alpha R_2)\,I_{-5/2}(\alpha R_1) \approx$$
$$\approx [3/(\alpha^2 R_1^2)] + \alpha\Delta_1\{[1/(\alpha R_1)] + [3/(2\alpha^2 R_1^2)]\} + \ldots,$$

откуда [6]

$$Э^{c(1)} = \frac{1}{3}\alpha R_1 p_{1,2}\left[\left(1 + \frac{2}{(\alpha R_1)^2}\right)\mathrm{sh}(\alpha\Delta_1) + \frac{3}{\alpha R_1}\mathrm{ch}(\alpha\Delta_1)\right]. \quad (3\text{-}39)$$

Приближенная формула для проводящей немагнитной полой сферы получена в работе [36]:

$$Э^{c(1)} = \left(3k_1 p_{2,1}^{0,5}\right)^{-1}\left[3k_1\cos(p_{2,1}-1)\,k_1 - \left(k_1^2 - 3\right)\sin(p_{2,1}-1)\,k_1\right], \quad (3\text{-}40)$$

где $p_{2,1} = R_2/R_1$; R_2 и R_1 — наружный и внутренний радиусы сферы; $k_1^2 = -i\omega\mu_1\gamma_1 R_1$. При $(\Delta_1/R_1) \ll 1$, где $R_1 \approx R_2$, с помощью выражения (3-39) находим

$$Э^{c(1)} \approx \mathrm{ch}(k\Delta_1) + (1/3)\,kR_1\,\mathrm{sh}(k\Delta_1), \quad (3\text{-}41)$$

откуда можно получить модуль $Э^{c(1)}$, используя табличные гиперболические функции с комплексным аргументом ($k^2 = i\omega\mu_1\gamma_1$).

Многослойные сферические оболочки. Экранирующие функции для многослойных оболочек могут быть получены с помощью известных выражений [10].

Сферы двухслойные.

Экранирующие функции для двухслойных сферических оболочек (рис. 2-3, где $R_5, \ldots, R_{2\nu} \to \infty$) могут быть определены в виде [10]

$$Э^{c(2)} = Э_1^{c(1)} Э_2^{c(2)}\left[1 - p_{2,3}^2 W_{1(a)}^{c(1)} W_{2(i)}^{c(1)}\right]; \quad (3\text{-}42а)$$

$$W_a^{c(2)} = W_{2(a)}^{c(1)} + \frac{Э_1^{c(1)}}{Э^{c(2)} Э_2^{c(1)}} W_{1(a)}^{c(1)} p_{2,4}^3; \quad (3\text{-}42б)$$

$$W_i^{c(2)} = W_{1(i)}^{c(1)} + \frac{Э_2^{c(1)}}{Э^{c(2)} Э_1^{c(1)}} W_{2(i)}^{c(1)} p_{1,3}^3, \quad (3\text{-}42в)$$

где

$$\left.\begin{aligned} Э_1^{c(1)} &= 1 + 2/9\,(\nu_{1,0} - 1)(1 - \nu_{0,1})\left(1 - p_{1,2}^3\right); \\ Э_2^{c(1)} &= 1 + 2/9\,(\nu_{1,0} - 1)(1 - \nu_{0,1})\left(1 - p_{3,4}^3\right); \end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}43)$$

$$\left\{\begin{matrix} W_{1(i)}^{c(1)} \\ W_{1(a)}^{c(1)} \end{matrix}\right\} = -2/9\left(Э_1^{c(1)}\right)^{-1}(\nu_{1,0} - 1)\left(1 - p_{1,2}^3\right)\left\{\begin{matrix} (1 + 2\nu_{0,1}); \\ (1 + 0{,}5\nu_{0,1}); \end{matrix}\right. \quad (3\text{-}44)$$

$W_{a,i}^{c(2)}$ — функции обратного действия двухслойного экрана (a и i — внешняя и внутренняя реакция); $W_{1(a)}^{c(1)}$, $W_{1(i)}^{c(1)}$, $W_{2(a)}^{c(1)}$, $W_{2(i)}^{c(1)}$ —

функции обратного действия (внешняя и внутренняя) первого и второго слоев. Если подставить в (3-42а) выражения (3-43) и (3-44), то получим (при условии $\mu = \mu_1 = \mu_2$)

$$Э^{c\,(2)} = 1 + \frac{2}{9}\left(\nu_{1,\,0}^{0,\,5} - \nu_{0,\,1}^{0,\,5}\right)^2\left(1 - p_{1,\,2}^3 p_{3,\,4}^3\right) +$$

$$+ \frac{4}{81}(\nu_{1,\,0} - 1)^2\left(1 + 2\nu_{0,\,1}\right)\left(1 + 0{,}5\nu_{0,\,1}\right)\left(1 - p_{1,\,2}^3\right) \times$$

$$\times\left(1 - p_{2,\,3}^3\right)\left(1 - p_{3,\,4}^3\right). \quad (3\text{-}45)$$

Максимальный экранирующий эффект можно получить при условии $p^3 = p_{1,\,2}^3 = p_{2,\,3}^3 = p_{3,\,4}^3$. Тогда при $\mu_1 \gg \mu_0$

$$Э^{c\,(2)} = \frac{2}{9}\nu_{1,\,0}\left(1 - p^6\right) + \frac{4}{81}\nu_{1,\,0}^2\left(1 - p^3\right)^3. \quad (3\text{-}46)$$

Особенно заметным будет преимущество рассмотренного типа экранов по сравнению с массивными экранами той же общей толщины при необходимости получить бо́льший экранирующий эффект.

В формулах (3-43) экранирующие функции для отдельных слоев записаны в магнитостатическом приближении. При необходимости учесть вихревые токи в ферромагнитных оболочках следует использовать $Э_j^{c\,(1)}$ ($j = 1,\ 2$) — из (3-34а), $W_{j\,(i)}^{c\,(1)}$ — из (3-44) и

$$W_{j\,(a)}^{c\,(1)} = \frac{\left(Э_j^{c\,(1)}\right)^{-1}}{3p_{2,\,1}^3}\left[\left(\frac{K}{2}p_{2,\,1} - \frac{2}{K}\right)\operatorname{sh}(\alpha\Delta_1) - (p_{2,\,1} - 1)\operatorname{ch}(\alpha\Delta_1)\right]. \quad (3\text{-}47)$$

Сферы трехслойные.

Экранирующие функции для трехслойных сферических оболочек (рис. 2-3, где $R_7, \ldots, R_{2\nu} \to \infty$) определяются в виде [10]:

$$Э^{c\,(3)} = Э_1^{c\,(1)}Э_2^{c\,(1)}Э_3^{c\,(1)}\left[\left(1 - W_{1\,(a)}^{c\,(1)}W_{2\,(i)}^{c\,(1)}\right)\left(1 - W_{2\,(a)}^{c\,(1)}W_{3\,(i)}^{c\,(1)}\right) - \right.$$

$$\left. - p_{2,\,5}^3 W_{1\,(a)}^{c\,(1)}W_{3\,(i)}^{c\,(1)}\left(Э_2^{c\,(1)}\right)^2\right]; \quad (3\text{-}48а)$$

$$W_a^{c\,(3)} = W_{3\,(a)}^{c\,(1)} + \frac{Э_1^{c\,(1)}Э_2^{c\,(1)}}{Э^{c\,(3)}Э_3^{c\,(1)}}\left[p_{4,\,6}^3 W_{2\,(a)}^{c\,(1)}\left(1 - W_{1\,(a)}^{c\,(1)}W_{2\,(i)}^{c\,(1)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + p_{2,\,6}^3 W_{1\,(a)}^{c\,(1)}\left(Э_2^{c\,(1)}\right)^{-2}\right]; \quad (3\text{-}48б)$$

$$W_i^{c\,(3)} = W_{1\,(i)}^{c\,(1)} + \frac{Э_2^{c\,(1)}Э_3^{c\,(1)}}{Э^{c\,(3)}Э_1^{c\,(1)}}\left[p_{1,\,3}^3 W_{2\,(i)}^{c\,(1)}\left(1 - W_{2\,(a)}^{c\,(1)}W_{3\,(i)}^{c\,(1)}\right) + \right.$$

$$\left. + p_{1,\,5}^3 W_{3\,(i)}^{c\,(1)}\left(Э_2^{c\,(1)}\right)^{-2}\right], \quad (3\text{-}48в)$$

где $p_{\alpha,\,\beta} = R_\alpha/R_\beta$; $W_{j\,(i)}^{c\,(1)}$ ($j = 1,\ 2,\ 3$) определяются по (3-44); $W_{j\,(a)}^{c\,(1)}$ ($j = 1,\ 2,\ 3$) — по (3-47); $Э_j^{c\,(1)}$ ($j = 1,\ 2,\ 3$) — по (3-43).

Сферы многослойные.

Пользуясь методикой, изложенной в работе [10], получим следующие рекуррентные соотношения, позволяющие найти эффективность экранирования ν-слойным экраном и функции обратного действия через эффективность экранирования $(\nu-1)$-слойным экраном и функции обратного действия:

$$Э^{c\nu} = Э^{c(\nu-1)} Э^{c(1)}_{\nu} \left[1 - p^3_{\nu,\nu+1} W^{c(\nu-1)}_a W^{c(1)}_{\nu(i)}\right]; \quad (3\text{-}49а)$$

$$W^{c\nu}_a = W^{c(1)}_{\nu(a)} + W^{c(\nu-1)}_a \left[Э^{c(\nu-1)} / \left(Э^{c\nu} Э^{c(1)}_{\nu}\right)\right] p^3_{\nu,\nu+2}. \quad (3\text{-}49б)$$

Выражения для $Э^{c(1)}_{\nu}$, $W^{c(1)}_{\nu(i)}$ и $W^{c(1)}_{\nu(a)}$ можно получить из формул (3-44), если заменить в них $p_{1,2}$ на $p_{\nu+1}$, $p_{\nu+2}$, и, кроме того, в (3-43) заменить $Э^{c(1)}_1$ на $Э^{c(1)}_{\nu}$; индекс «ν» в формулах (3-49) обозначает отношение к последнему магнитному слою.

Сферы тонкостенные. Используя общий метод расчета (см. § 3-1), из формул (2-21) и (3-15) могут быть получены формулы для экранирующих функций ν тонкостенных оболочек при падении на них однородных электромагнитных полей. В формулах сохраняется лишь одна гармоника $(n=1)$. По условию круговой симметрии индекс «m» не используется. Индекс $n=1$ для упрощения записи опускается.

Сферы однослойные.

Из формул (3-16) получим (рис. 2-4, где $R_2, \ldots, R_\nu \to \infty$)

$$Э^{c(1)} = \frac{1}{3}\left(p_1 + q_1\right)^{-1}\left[3\left(q_1 - p_1\right) + 4p_1 q_1 R_1^{-1} - 2R_1\right]; \quad (3\text{-}50а)$$

$$W^{c(1)}_a = -\frac{4\left(R_1 + p_1 q_1 R_1^{-1}\right)}{3\left(q_1 - p_1\right) + 4p_1 q_1 R_1^{-1} - 2R_1}, \quad (3\text{-}50б)$$

где $p_1 = \mu_1\Delta_1/(2\mu_0)$; $q_1 = 2/(i\omega\mu_0\gamma_1\Delta_1)$; R_1 — усредненный радиус полой сферы; μ_1, γ_1 и Δ_1 — магнитная проницаемость, электрическая проводимость и толщина материала оболочки. Аналогичные результаты приводятся в работах [1, 2]. Если в выражениях (3-35) из-за тонкостенности оболочки пренебречь изменением радиуса по толщине, то [10]

$$Э^{c(1)} = \operatorname{ch}(\alpha\Delta_1) + \frac{1}{3}\left(K + \frac{2}{K}\right)\operatorname{sh}(\alpha\Delta_1); \quad (3\text{-}51а)$$

$$W^{c(1)}_a = \frac{(1/3)(K/2 - 2/K)\operatorname{sh}(\alpha\Delta_1)}{\operatorname{ch}(\alpha\Delta_1) + (1/3)(K + 2/K)\operatorname{sh}(\alpha\Delta_1)}, \quad (3\text{-}51б)$$

где $K = \nu_{0,1}\alpha R_1$; $\alpha = \left(k^2 + 2/R_1^2\right)^{1/2}$; $k^2 = i\omega\mu_1\gamma_1$.

Для области низких частот, используя (3-39), при условиях $\omega \to 0$; $\alpha\Delta_1 \ll 1$; $\operatorname{sh}(\alpha\Delta_1) \to \alpha\Delta_1$; $\operatorname{ch}(\alpha\Delta_1) \to 1$; $R_1 \approx R_2$

$$Э^{c(1)} \approx \left[\alpha^2 R_1\Delta_1 + 3\left(1 + \Delta_1/R_1\right)\right]/3. \quad (3\text{-}52)$$

Поскольку на практике часто $\Delta_1/R_1 \ll 1$, то из (3-52)

$$Э^{c(1)} = 1 + \alpha^2 R_1\Delta_1/3. \quad (3\text{-}53)$$

Сферы двухслойные. Из формул (2-23) и (3-15) получим (рис. 2-4, где $R_3, \ldots, R_\nu \to \infty$)

$$Э^{c\,(2)} = \{ [(4p_1q_1/R_1) + 3(q_1 - p_1) - 2R_1][(4p_2q_2/R_2) + 3(q_2 - p_2) - 2R_2] - 4p^3_{1,2}[R_1 + (4p_1q_1/R_1)] \times [R_2 + (4p_2q_2/R_2)] \}/[9(p_1 + q_1)(p_2 + q_2)]; \qquad (3\text{-}54\text{а})$$

$$W_a^{c\,(2)} = -\{[R_2 + (4p_2q_2/R_2)][(2p_1q_1/R_1) - (3/2)(q_1 - p_1) - R_1] - p^3_{1,2}[R_1 + (4p_1q_1/R_1)][(2p_2q_2/R_2 - (3/2)(q_2 - p_2) - R_2]\} \times \{2\{[3(q_1 - p_1) + (4p_1q_1/R_1) - 2R_1][3(q_2 - p_2) + (4p_2q_2/R_2) - 2R_2] - 4p^3_{1,2}[R_1 + (4p_1q_1/R_1)] \times [R_2 + (4p_2q_2/R_2)]\}\}^{-1}, \qquad (3\text{-}54\text{б})$$

где $p_j = \mu_j\Delta_j/(2\mu_0)$, $j = 1,\ 2$; $q_j = 2/(i\omega\mu_0\gamma_j\Delta_j)$; R_1, R_2 — усредненные радиусы слоев.

3. Сферы многослойные. При расчете экранирующих функций ν-слойных оболочек (рис. 2-4) необходимо использовать формулы (2-21) и (3-15), а также формулы (3-49).

Формулы, записанные для расчета экранирующих функций проводящих ферромагнитных оболочек, могут быть преобразованы, если выполнить условие $p_j = 0$ — для проводящих неферромагнитных оболочек и $q_j \to \infty$ — для непроводящих ферромагнитных оболочек.

Сфероидальные оболочки.

Сфероиды тонкостенные немагнитные. Рассматриваются бесконечно тонкие проводящие сфероиды с конечной удельной поверхностной проводимостью γ_s, которая может быть функцией точки. В дальнейшем она [8] считается симметричной относительно оси вращения. Среда внутри и вне оболочек предполагается непроводящей и однородной, а сами оболочки — немагнитными. Внешнее переменное магнитное поле напряженностью $\mathbf{H}^{(0)}$ произвольного направления можно разложить на составляющие $\mathbf{H}_a$ и $\mathbf{H}_\tau$, направленные, соответственно, параллельно оси симметрии оболочки и перпендикулярно к ней. Поэтому достаточно рассмотреть два варианта с $\mathbf{H}^{(0)} = \mathbf{H}_a$ и с $\mathbf{H}^{(0)} = \mathbf{H}_\tau$, суперпозиция которых позволяет получить решение и для общего случая.

Задача сводится к решению уравнения Лапласа для скалярного потенциала v поля при условиях (1-37), записанных для сфероидальных координат (α, β, φ) в виде

$$\left.\frac{\partial v_{II}}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=\alpha_0} = \left.\frac{\partial v_I}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=\alpha_0}; \qquad (3\text{-}55)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta}\left[\frac{1}{\gamma_s}\frac{h_\varphi}{h_\beta}\frac{\partial}{\partial \beta}(v_{II} - v_I)\right] + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\frac{1}{\gamma_s}\frac{h_\beta}{h_\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}(v_{II} - v_I)\right] = -i\omega\mu_0\frac{h_\beta h_\varphi}{h_\alpha}\frac{\partial v_I}{\partial \alpha},$$

где h_ξ ($\xi=\alpha, \beta, \varphi$) — коэффициенты Ламе; $v_{\rm I}$, $v_{\rm II}$ — скалярные потенциалы поля по обе стороны оболочки:

$$v_{\rm I}=v_1+v_0; \qquad v_{\rm II}=v_2+v_0;$$

v_1, v_2, v_3 — скалярные потенциалы поля в первой, во второй областях и исходного поля.

1. Сфероид вытянутый. Для переменного магнитного поля напряженностью $\mathbf{H}^{(0)}$, направленной параллельно оси вращения (рис. 2-5),

$$v=-c\mathbf{H}^{(0)}P_1(\operatorname{ch}\alpha)P_1(\cos\beta);$$

$$v_1=\sum_n a_nP_n(\operatorname{ch}\alpha)P_n(\cos\beta); \tag{3-56}$$

$$v_2=\sum_n b_nQ_n(\operatorname{ch}\alpha)P_n(\cos\beta), \qquad n=1,\ 3,\ 5,\ \ldots,$$

где a_n, b_n — постоянные; P_n и Q_n — функции Лежандра первого и второго рода; $c=(b^2-a^2)^{1/2}$; a, b — полуоси сфероида.

После подстановки выражений (3-56) в (3-55) и преобразований получим

$$\sum_n\left\{\frac{1}{Q_n'(\operatorname{sh}\alpha_0)\operatorname{ch}^2\alpha_0\left(\operatorname{ch}^2\alpha_0-\sin^2\beta\right)^{1/2}}-\frac{\omega\mu_0\gamma_s aP_n'(\operatorname{sh}\alpha_0)}{n(n+1)}\right\}\times$$

$$\times\, a_nP_n^{(1)}(\cos\beta)=\frac{1}{2}\omega\mu\gamma_s a\mathbf{H}^{(0)}cP_1'(\cos\beta), \tag{3-57}$$

где $P_n^{(1)}(\cos\beta)$ — присоединенная функция Лежандра первого рода.

Если принять

$$\gamma_s=\gamma\operatorname{ch}\alpha_0/(\operatorname{ch}^2\alpha_0-\cos^2\beta)^{1/2}, \tag{3-58}$$

где γ — значение γ_s при $\beta=\pi/2$, то

$$\mathit{Э}_{\parallel}^{\text{сф}\,(1)}=1+i\xi_{\parallel} \tag{3-59}$$

при $\xi_{\parallel}=-0{,}5\omega\mu_0\gamma b\operatorname{ch}\alpha_0\operatorname{sh}^2\alpha_0 Q_1'(\operatorname{ch}\alpha_0)$.

Поле внутри полости оболочки однородно, и магнитная напряженность $\mathbf{H}^{(i)}$ направлена параллельно оси вращения. При $\gamma_s=\mathrm{const}$ скалярный потенциал поля внутри экрана содержит весь спектр нечетных сфероидальных гармоник и является неоднородным.

Для переменного магнитного поля напряженностью $\mathbf{H}^{(0)}$, направленной перпендикулярно оси вращения,

$$v_0=-c\mathbf{H}^{(0)}P_1^{(1)}(\operatorname{ch}\alpha)P_1^{(1)}(\cos\beta)\cos\varphi;$$

$$v_1=\sum_n a_nP_n^{(1)}(\operatorname{ch}\alpha)P_n^{(1)}(\cos\beta)\cos\varphi; \tag{3-60}$$

$$v_2=\sum_n b_nQ_n^{(1)}(\operatorname{ch}\alpha)P_n^{(1)}(\cos\beta)\cos\varphi, \qquad n=1,\ 3,\ 5,\ \ldots$$

При γ_s, определяемой формулой (3-58), решение имеет такой же вид, как и для магнитного поля напряженностью, направленной параллельно оси. Поле внутри оболочки однородно с напряженностью $\mathbf{H}^{(0)}$, направленной перпендикулярно оси.

Эффективность экранирования определяется формулой (3-59) при

$$\xi_{\perp} = 0{,}5\omega\mu_0\gamma_0 b\left[\operatorname{ch}\alpha_0 \operatorname{sh}^2\alpha_0/(2\operatorname{ch}^2\alpha_0 - 1)\right] P_1^{1\prime}(\operatorname{ch}\alpha_0)\, Q_1^{1\prime}(\operatorname{ch}\alpha_0). \quad (3\text{-}61)$$

При $\gamma_s = \text{const}$ задача сводится к решению уравнений (3-57).

2. Сфероид сжатый. Для переменного магнитного поля напряженностью $\mathbf{H}^{(0)}$, направленной параллельно оси вращения (рис. 2-6),

$$\begin{aligned} v_0 &= i\mathbf{H}^{(0)} c P_1(i\operatorname{sh}\alpha)\, P_1(\cos\beta); \\ v_1 &= \sum_n a_n P_n(i\operatorname{sh}\alpha)\, P_n(\cos\beta); \\ v_2 &= \sum_n b_n Q_n(i\operatorname{sh}\alpha)\, P_n(\cos\beta), \end{aligned} \quad (3\text{-}62)$$

где используются обозначения, как и в формулах (3-56); $c = (a^2 - b^2)^{0,5}$.

После подстановки (3-62) в условия (3-55) и преобразований получим

$$\sum_n \left\{ \frac{1}{Q_n'(i\operatorname{sh}\alpha_0)\operatorname{ch}^2\alpha_0\left(\operatorname{ch}^2\alpha_0 - \sin^2\beta\right)^{0,5}} - \frac{\omega\mu_0\gamma_s a P_n'(i\operatorname{sh}\alpha_0)}{n(n+1)} \right\} \times$$
$$\times a_n P_n^1(\cos\beta) = 0{,}5 i\omega\mu\gamma_s a\mathbf{H}^{(0)} c P_1^1(\cos\beta), \quad (3\text{-}63)$$

где $P_n^1(\cos\beta)$ — присоединенная функция Лежандра первого рода.

Если принять γ_s равной (3-58), то

$$Э_{\parallel}^{\text{сф}\,(1)} = 1 + i\xi_{\parallel} \quad (3\text{-}64)$$

— комплексное число, одинаковое для всех точек внутри оболочки;

$$\xi_{\parallel} = 0{,}5 i\omega\mu_0\gamma a \operatorname{ch}^3\alpha_0 Q_1'(i\operatorname{sh}\alpha_0).$$

Если оболочка имеет постоянную поверхностную проводимость γ_s ($\gamma_s = \text{const}$), то получаем систему уравнений вида

$$ia_k + \sum_n C_{kn} a_n = c\mathbf{H}^{(0)}\delta_{k1}, \quad (3\text{-}65)$$

где

$$\begin{aligned} C_{kn} &= (2k+1)\, p_{kn}/\left[2\mu\omega\gamma_s a i Q_n'(i\operatorname{sh}\alpha_0)\, P_k'(i\operatorname{sh}\alpha_0)\operatorname{ch}^2\alpha_0\right]; \\ p_{kn} &= \int_{-1}^{+1}\left[P_n^1(\nu)\, P_k^1(\nu)/(\operatorname{sh}^2\alpha_0 + \nu^2)^{0,5}\right] d\nu. \end{aligned} \quad (3\text{-}66)$$

Коэффициенты p_{kn} можно найти путем численного интегрирования (3-66) при заданном α_0. Решение системы уравнений (3-65) имеет вид

$$\check{a}_n = ic\mathbf{H}^{(0)}(A_{1n}/D), \tag{3-67}$$

где A_{1n} — алгебраические дополнения соответствующих элементов главного определителя системы

$$D = \begin{vmatrix} C_{11}+i & C_{13} & C_{15} & \dots \\ C_{31} & C_{33}+i & C_{35} & \dots \\ C_{51} & C_{53} & C_{55}+i & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Эффективность экранирования может быть записана в виде

$$Э_{\parallel}^{сф\,(1)} = (1+i\xi_{\parallel})/(1+i\xi_{\parallel}+\xi_{\parallel}) \tag{3-68}$$

при $\xi_{\parallel} = 1/\sum\limits_n C_{1n}(A_{1n}/A_{11})$.

Для поля напряженностью $\mathbf{H}^{(0)}$, направленной перпендикулярно оси вращения,

$$v_0 = i\mathbf{H}^{(0)}cP_1^1(i\,\mathrm{sh}\,\alpha)\,P_1^1(\cos\beta)\cos\varphi;$$

$$v_1 = \sum_n a_n P_n^1(i\,\mathrm{sh}\,\alpha)\,P_n'(\cos\beta)\cos\varphi;$$

$$v_2 = \sum_n b_n Q_n^1(i\,\mathrm{sh}\,\alpha)\,P_n^1(\cos\beta)\cos\varphi, \qquad n = 1,\ 3,\ 5,\ \dots$$

Применение граничных условий (3-55) приводит к уравнению

$$\sum_n ia_n P_n^{1\prime}(i\,\mathrm{sh}\,\alpha_0)\,P_n^1(\cos\beta) + \frac{1}{\mathrm{ch}\,\alpha\,\sin\beta}\left\{\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{\mathrm{ch}\,\alpha_0\sin^2\beta}{\omega\mu_0 a\gamma_s(\mathrm{ch}^2\alpha_0-\sin^2\beta)^{0.5}}\times\right.\right.$$

$$\left.\times\sum_n a_n G_n P_n^{1\prime}(\cos\beta)\right] + \left.\frac{(\mathrm{ch}^2\alpha_0-\sin^2\beta)^{0.5}}{\omega\mu_0\gamma_s a\,\mathrm{ch}\,\alpha_0\sin\beta}\sum_n a_n G_n P_n^1(\cos\beta)\right\} =$$

$$= c\mathbf{H}^{(0)}P_1^{1\prime}(i\,\mathrm{sh}\,\alpha_0)\,P_1^1(\cos\beta), \tag{3-69}$$

где

$$G_n = [(n+1)!/(n-1)!]/[Q_n^{1\prime}(i\,\mathrm{sh}\,\alpha_0)\,\mathrm{ch}^2\alpha_0]; \tag{3-70}$$

$P_n^{1\prime}$, $Q_n^{1\prime}$ — производные от P_n^1, Q_n^1 по их аргументам.

Если проводимость оболочки изменяется по закону (3-58), то можно убедиться после преобразований при $n>1$, что все коэффициенты a_n равны нулю, а при $n=1$ справедлива формула (3-64):

$$Э_{\perp}^{сф} = 1 + i\xi_{\perp}$$

при

$$\xi_{\perp} = 0{,}5\omega\mu_0\gamma a P_1^{1\prime}(i\,\mathrm{sh}\,\alpha_0)\,Q_1^{1\prime}(i\,\mathrm{sh}\,\alpha_0)\,\mathrm{ch}^5\alpha_0/[i(2\,\mathrm{ch}^2\alpha_0-1)]. \tag{3-71}$$

Поле внутри оболочки однородно. Напряженность магнитного поля $\mathbf{H}^{(i)}$ направлена также перпендикулярно оси вращения оболочки.

Для оболочки с $\gamma_s = \mathrm{const}$, умножая уравнение (3-69) на $P_k^1(\cos\beta)\sin\beta\, d\beta$ и проводя интегрирование в пределах от 0 до π, получим систему уравнений (3-65), где

$$C_{kn} = \frac{(2k+1)}{2\omega\gamma\mu_0 a} \frac{(k-1)!}{(k+1)!} \frac{G_n}{P_k^{1\prime}(i\,\mathrm{sh}\,\alpha_0)} q_{kn}, \tag{3-72}$$

причем G_n определяется формулой (3-70), а

$$q_{kn} = \int_{-1}^{+1} \left[\frac{1}{\mathrm{ch}^2\alpha_0} - n(n+1)\right] \frac{P_n^1(\nu)\,P_k^1(\nu)}{(\mathrm{sh}^2\alpha_0 + \nu^2)^{0,5}} d\nu - \\ - \int_{-1}^{1} (1-\nu^2)\,\nu \frac{P_n^{1\prime}(\nu)\,P_k^1(\nu)}{\mathrm{sh}^2\alpha_0 + \nu^2} d\nu .$$

Решение уравнений (3-65) с учетом (3-72) имеет вид

$$a_n = ic\mathbf{H}^{(0)}(A_{1n}/D). \tag{3-73}$$

Из-за наличия пространственных гармоник электромагнитное поле внутри оболочки неоднородно.

Из изложенного следует, что при надлежащем выборе закона изменения поверхностной проводимости сжатый сфероид оказывается однородно экранирующим независимо от направления действия напряженности внешнего магнитного поля. При постоянстве проводимости, а также при произвольном ее изменении вдоль поверхности оболочки однородное экранирование не имеет места.

Круговые цилиндрические оболочки.

Цилиндры однослойные.

Решение осуществляется в координатах (r, φ, z). Проводящий ферромагнитный экран с электромагнитными параметрами μ_1 и γ_1 окружен диэлектрической средой с $\gamma_0 = 0$ и μ_0. Радиусы внутренней и наружной поверхностей экрана обозначим через ρ_1 и ρ_2. Толщина стенки экрана Δ_1. Материалы экрана и среды являются однородными и изотропными.

1. Напряженность $\mathbf{H}^{(0)}$ электромагнитного поля направлена перпендикулярно оси цилиндра (рис. 2-9, где $\rho_3, \ldots, \rho_{2\nu} \to \infty$). Эффективность экранирования $Э_{\perp}^{ц(1)}$ и функция обратного действия $W_{\perp(a)}^{ц(1)}$ представляются в виде

$$Э_{\perp}^{ц(1)} = \left[1/\left(2p_{2,1}^2\right)\right]\left[(p_{2,1}+1)\,\mathrm{ch}(\alpha\Delta_1) + \left(p_{2,1}K_1 + K_1^{-1}\right)\mathrm{sh}(\alpha\Delta_1)\right]; \tag{3-74а}$$

$$W_{\perp(a)}^{ц(1)} = \left[1/\left(2p_{2,1}^2\right)\right]\left[\left(p_{2,1}K_1 - K_1^{-1}\right)\mathrm{sh}(\alpha\Delta_1) - \\ - (p_{2,1}-1)\,\mathrm{ch}(\alpha\Delta_1)\right]/Э_{\perp}^{ц(1)}, \tag{3-74б}$$

где $p_{2,1} = \rho_2/\rho_1$; $K_1 = \alpha\rho_1/\nu_{1,0}$; $\alpha = [k^2 + (1/\rho_1)^2]^{0,5}$; $k^2 = i\omega\mu_1\gamma_1$.

Если считать экран тонкостенным и положить $p_{2,1} \to 1$, то выражения (3-74) упрощаются:

$$Э_{\perp}^{ц(1)} = \mathrm{ch}(k\Delta_1) + 0{,}5\left(K_1 + K_1^{-1}\right)\mathrm{sh}(k\Delta_1); \qquad (3\text{-}75а)$$

$$W_{\perp(a)}^{ц(1)} = \frac{0{,}5\left(K_1 - K_1^{-1}\right)\mathrm{sh}(k\Delta_1)}{\mathrm{ch}(k\Delta_1) + 0{,}5\left(K_1 + K_1^{-1}\right)\mathrm{sh}(k\Delta_1)}, \qquad (3\text{-}75б)$$

и соответствуют приведенным в работе [10].

При написании формул (3-74) и (3-75) сделаны упрощения в уравнении для нахождения единственной составляющей напряженности электрического поля $\mathbf{E}_z$ в проводящей среде:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathbf{E}_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}_r}{\partial \varphi^2} = k^2\mathbf{E}_r. \qquad (3\text{-}76)$$

Считалось, что из-за тонкостенности экрана можно пренебречь изменением радиуса по толщине и положить $r = \rho_1 = \mathrm{const}$, а решение (3-76) записать в виде

$$\mathbf{E}_z = (Ae^{\alpha r} + Be^{-\alpha r})\sin\varphi. \qquad (3\text{-}77)$$

Решая уравнение (3-76) без упрощений, получим

$$\mathbf{E}_z = [A_1 I_1(x) + B_1 K_1(x)]\sin\varphi, \qquad (3\text{-}78)$$

где $I_1(x)$ и $K_1(x)$ — модифицированные цилиндрические функции первого и второго рода первого порядка; $x = r(-i\omega\mu\gamma)^{0,5} = |x|\exp(\pm i\varphi)$; $\varphi = 3\pi/4$ — аргумент; $|x|$ — модуль.

С учетом (3-78) экранирующие функции записываются в виде

$$Э_{\perp}^{ц(1)} = \pi\left(4\nu_{1,0}p_{2,1}\right)^{-1}\left(A_{1,0}^{(2)}B_{1,2}^{(1)} - A_{1,2}^{(1)}B_{1,0}^{(2)}\right); \qquad (3\text{-}79а)$$

$$W_{\perp(i)}^{ц(1)} = \left(A_{1,0}^{(1)}B_{1,0}^{(2)} - A_{1,0}^{(2)}B_{1,0}^{(1)}\right)/\left(A_{1,0}^{(2)}B_{1,2}^{(1)} - A_{1,2}^{(1)}B_{1,0}^{(2)}\right), \qquad (3\text{-}79б)$$

где

$$\begin{gathered} B_{ik}^{j} = (\nu_{1,0} - 1)I_i(x_j) + x_j I_k(x_j); \\ A_{ik}^{j} = (\nu_{1,0} - 1)K_i(x_j) + x_j K_k(x_j), \quad j = 1,\ 2; \quad i, k = 0, 1, 2. \end{gathered} \qquad (3\text{-}80)$$

Формулы (3-79) и (3-80) справедливы для экранирующих функций бесконечных круговых цилиндрических оболочек с произвольными радиусами стенок из проводящих ферромагнитных материалов, работающих в широком диапазоне частот электромагнитного поля. Практически же расчеты по этим формулам становятся затруднительными при значениях модуля больше 10. Поэтому эти выражения целесообразно преобразовать для освобождения от цилиндрических функций, которые заменяются разложениями Ханкеля [6] (см. приложение). После необходимых преобразований получим

$$Э_{\perp}^{ц(1)} = [M_{1s}\sin(\alpha\Delta_1) + M_{2s}\cos(\alpha\Delta_1)](x_1x_2)^{0,5}/(2p_{2,1}\nu_{1,0}); \qquad (3\text{-}81а)$$

$$W_{\perp(i)}^{ц(1)} = [M_{1w}\sin(\alpha\Delta_1) + M_{2w}\cos(\alpha\Delta_1)]/[M_{1s}\sin(\alpha\Delta_1) + M_{2s}\cos(\alpha\Delta_1)], \qquad (3\text{-}81б)$$

где $\alpha = (-i\omega\gamma_1\mu_1R_1)^{0,5}$; M_{1s}, M_{2s}, M_{1w}, M_{2w} берутся из приложения при $n = 1$.

Для проводящих немагнитных оболочек, находящихся в магнитном поле с перпендикулярной оси вращения напряженностью, эффективность экранирования может быть записана в виде

$$Э_{\perp}^{ц\,(1)} = \zeta/\{2x_2\,[H_1^{(2)}(x_1)\,H_1^{(1)\prime}(x_2) - H_1^{(1)}(x_2)\,H_1^{(2)\prime}(x_1)]\}, \qquad (3\text{-}82)$$

где $\zeta = [H_1^{(1)}(x_2) + x_2H_1^{(1)\prime}(x_2)]\,[H_1^{(2)}(x_1) - x_1H_1^{(2)\prime}(x_1)] - [H_1^{(2)}(x_1) + x_1H_1^{(2)\prime}(x_1)]\,[H_1^{(1)}(x_2) - x_2H_1^{(1)\prime}(x_2)]$.

Для функций Ханкеля соблюдаются соотношения

$$H_1^{(1)\prime}(x_j) = H_0^{(1)}(x_j) - x_j^{-1}H_1^{(1)}(x_j); \quad H_1^{(2)\prime}(x_j) = H_0^{(2)}(x_j) - x_j^{-1}H_1^{(2)}(x_j),$$

поэтому

$$Э_{\perp}^{ц\,(1)} = \{[H_0^{(1)}(x_2)\,H_1^{(2)}(x_1) - H_0^{(2)}(x_1)\cdot H_1^{(1)}(x_2)] - 0{,}5x_2 \times \times [H_0^{(1)}(x_2)\,H_0^{(2)}(x_1) - H_0^{(2)}(x_1)\,H_0^{(1)}(x_2)]\}\,[H_0^{(1)}(x_2)\,H_1^{(2)}(x_1) - - H_0^{(2)}(x_1)\,H_1^{(1)}(x_2)]^{-1}. \qquad (3\text{-}83)$$

Для экранов, у которых $\Delta_1 = \rho_2 - \rho_1 \ll \rho_1$, разлагая в ряд функции Ханкеля от x_2 около значения x_1, получим

$$H_0^{(1)}(x_2) = H_0^{(1)}(x_1 + k\Delta_1) = H_0^{(1)}(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{1!}H_0^{(1)\prime}(x_1) + \ldots \qquad (3\text{-}84)$$

Удерживая лишь первые два члена разложения, получим

$$Э_{\perp}^{ц\,(1)} = 1 + 0{,}5i\omega\gamma\mu_0\Delta_1\rho_1 \qquad (3\text{-}85)$$

или по модулю

$$|Э_{\perp}^{ц\,(1)}| = 1 + (\rho_1/\delta)^4\,(\Delta_1/\rho_1)^2. \qquad (3\text{-}86)$$

2. Напряженность $\mathbf{H}^{(0)}$ электромагнитного поля направлена параллельно оси цилиндра. Эффективность экранирования

$$Э_{\parallel}^{ц\,(1)} = p_{1,2}^{0,5}\,[\operatorname{ch}(k\Delta_1) + 0{,}5K\,\operatorname{sh}(k\Delta_1)], \qquad (3\text{-}87)$$

где $K = k\rho_1/\nu_{1,0}$; $k = (1 + i)/\delta$; $\delta = [2/(\omega\mu_1\gamma_1)]^{0,5}$.

При $r = \rho_1 \approx \rho_2$ это выражение преобразуется к виду [10]

$$Э_{\parallel}^{ц\,(1)} = \operatorname{ch}(k\Delta_1) + 0{,}5K\,\operatorname{sh}(k\Delta_1). \qquad (3\text{-}88)$$

Цилиндры двухслойные.

Эффективность экранирования двухслойными коаксиальными цилиндрами, бесконечно протяженными параллельно направлению напряженности $\mathbf{H}^{(0)}$ внешнего поля (рис. 2-9, где $\rho_5, \ldots, \rho_{2\nu} \to \infty$), определяется в виде (параметры оболочек: $S_1 - \mu_1,\ \gamma_1$; $S_2 - \mu_2,\ \gamma_2$)

$$Э_{\parallel}^{ц\,(2)} = [\operatorname{ch}(k_1\Delta_1) + [\rho_1/(q_1k_1\Delta_1)]\,\operatorname{sh}(k_1\Delta_1)]\,\{\operatorname{ch}(k_2\Delta_2) + + [\rho_2/(q_2k_2\Delta_2)]\,[1 - (\rho_1 + \Delta_1)^2/\rho_2^2]\,\operatorname{sh}(k_2\Delta_2)\} + [(\rho_1 + \Delta_1)\,k_1\gamma_2/(\rho_2k_2\gamma_1)] \times \times [\operatorname{sh}(k_1\Delta_1) + [\rho_1/(q_1k_1\Delta_1)]\,\operatorname{ch}(k_1\Delta_1)]\,\operatorname{sh}(k_2\Delta_2), \qquad (3\text{-}89)$$

где $k_j^2 = i\omega\mu_j\gamma_j$; $q_j = 2/(i\omega\mu_0\gamma_j\Delta_j)$.

Выражение для однослойного экрана (3-87) можно получить из (3-89) при условии $\Delta_2 = 0$. При высоких частотах $|k_1\Delta_1| \gg 1$ и $|k_2\Delta_2| \gg 1$ выражения (3-89) упрощаются:

$$Э_{\parallel}^{ц(2)} = \{1 + [\rho_1/(q_1k_1\Delta_1)]\}\left\{1 + [\rho_2/(q_2k_2\Delta_2)]\left[1 - \left(\frac{\rho_1 + \Delta_1}{\rho_2}\right)^2\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{(\rho_1 + \Delta_1)\,k_1\gamma_2}{\rho_2k_2\gamma_1}\{1 + [\rho_1/(q_1k_1\Delta_1)]\}\right\} 0{,}25\exp(k_1\Delta_1 + k_2\Delta_2). \quad (3\text{-}90)$$

При $|\omega\mu_0\gamma_1\rho_1/(2k_1)| \gg 1$ выражение (3-90) преобразуется к виду

$$Э_{\parallel}^{ц(2)} = \left\{\left\{\frac{\rho_1\delta_1}{q_1(1+i)\Delta_1}\left\{1 + \frac{\rho_2\delta_2}{q_2(1+i)\Delta_2}\left[1 - \left(\frac{\rho_1 + \Delta_1}{\rho_2}\right)^2\right]\right\} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\rho_1 + \Delta_1}{\Delta_1}\frac{\delta_2}{q_1(1+i)}\right\}\right\} 0{,}25\exp\{(1+i)[(\Delta_1/\delta_1) + (\Delta_2/\delta_2)]\}. \quad (3\text{-}91)$$

Если далее $1 - [(\rho_1 + \Delta_1)/\rho_2]^2$ пренебрежимо мало, то формула (3-91) переписывается в виде

$$|Э_{\parallel}^{ц(2)}| = \{(\omega^2\rho_1\delta_1\mu_0^2\gamma_1\rho_2\gamma_2\delta_2/8)[1 - (\rho_1 + \Delta_1)^2/\rho_2^2]\} \times$$
$$\times 0{,}25\exp[(\Delta_1/\delta_1) + (\Delta_2/\delta_2)]. \quad (3\text{-}92)$$

Из этого выражения следует, что эффективность экранирования двухслойной оболочки меньше, чем произведение эффективностей экранирования каждой из оболочек. Если между оболочками нет воздушного промежутка, то формула (3-92) преобразуется:

$$|Э_{\parallel}^{ц(2)}| = (0{,}125/\sqrt{2})[\omega\mu_0(\gamma_1\rho_1\delta_1 + \gamma_2\rho_2\delta_2)] \times$$
$$\times \exp[(\Delta_1/\delta_1) + (\Delta_2/\delta_2)]. \quad (3\text{-}93)$$

Последний член в (3-93) представляет собой адсорбционные потери, в то время как члены с $\delta_1/(\sqrt{2}\,\Delta_1)$ и $\delta_2/(\sqrt{2}\,\Delta_2)$ определяют поверхностные потери.

Симметрия в формуле (3-93) указывает, что при высоких частотах два слоя могут быть заменены без изменения эффективности экранирования одним. При низких частотах $|k_1\Delta_1| \ll 1$; $|k_2\Delta_2| \ll 1$, тогда в соответствии с выражением (3-91)

$$Э_{\parallel}^{ц(2)} = \{1 + [\rho_1/(2q_1)]\}\left\{1 + [\rho_2/(2q_2)]\left[1 - \left(\frac{\rho_1 + \Delta_1}{\rho_3}\right)^2\right]\right\} +$$
$$+ \frac{\rho_1 + \Delta_1}{\rho_2}(\mu_1\Delta_1 + 0{,}5\mu_0\rho_1)\,i\omega\gamma_2\Delta_2 \quad (3\text{-}94)$$

и отличается от него отсутствием адсорбционных потерь и поверхностного эффекта. При отсутствии зазора между оболочками

$$Э_{\parallel}^{ц(2)} = 1 + 0{,}5i\omega\mu_0\rho_1(\gamma_1\Delta_1 + \gamma_2\Delta_2) + i\omega\Delta_1\Delta_2\mu_1\gamma_2. \quad (3\text{-}95)$$

Очевидно, что комбинация высоких γ_2 и μ_1 увеличит эффективность экранирования.

Многослойные цилиндрические оболочки.

Цилиндры двухслойные (рис. 2-9, где $\rho_5, \ldots, \rho_{2\nu} \to \infty$).

Экранирующие функции для двухслойных сферических оболочек [10]

$$Э^{ц\,(2)} = Э_1^{ц\,(1)} Э_2^{ц\,(1)} \left(1 - W_{2\,(i)}^{ц\,(1)} W_{1\,(a)}^{ц\,(1)}\right); \tag{3-96а}$$

$$W_a^{ц\,(2)} = W_{2\,(a)}^{ц\,(1)} + W_{1\,(a)}^{ц\,(1)} \frac{\left(Э_2^{ц\,(1)}\right)^{-2}}{1 - W_{2\,(i)}^{ц\,(1)} W_{1\,(a)}^{ц\,(1)}}; \tag{3-96б}$$

$$W_i^{ц\,(2)} = W_{1\,(i)}^{ц\,(1)} + W_{2\,(i)}^{ц\,(1)} \frac{\left(Э_1^{ц\,(1)}\right)^{-2}}{1 - W_{2\,(i)}^{ц\,(1)} W_{1\,(a)}^{ц\,(1)}}. \tag{3-96в}$$

Формулы (3-96) аналогичны используемым для двухслойных сферических экранов (3-42). Экранирующие функции для отдельных оболочек, входящих в выражения (3-96), определяются по формулам (3-75а) — $Э_j^{ц\,(1)}$ ($j = 1, 2$); (3-75б) — $W_{j\,(a),\,(i)}^{ц\,(1)}$ ($j = 1, 2$), если напряженность поля приложена в поперечном сечении бесконечных концентрических оболочек; по (3-87) — $Э_j^{ц\,(1)}$ ($j = 1, 2$) при $W_{j\,(a),\,(i)}^{ц\,(1)}$ ($j = 1, 2) \equiv 0$, если напряженность поля приложена параллельно продольной оси системы бесконечных концентрических цилиндрических оболочек.

Цилиндры трехслойные (рис. 2-9, где $\rho_7, \ldots, \rho_{2\nu} \to \infty$).

Экранирующие функции для трехслойных круговых цилиндрических оболочек определяются в виде [10]

$$Э^{ц\,(3)} = Э_1^{ц\,(1)} Э_2^{ц\,(1)} Э_3^{ц\,(1)} \left[\left(1 - W_{1\,(a)}^{ц\,(1)} W_{2\,(i)}^{ц\,(1)}\right)\left(1 - W_{2\,(a)}^{ц\,(1)} W_{3\,(i)}^{ц\,(1)}\right) - p_{2,\,5}^2 W_{1\,(a)}^{ц\,(1)} W_{3\,(i)}^{ц\,(1)} \left(Э_2^{ц\,(1)}\right)^{-2}\right]; \tag{3-97а}$$

$$W_a^{ц\,(3)} = W_{3\,(a)}^{ц\,(1)} + \frac{Э_1^{ц\,(1)} Э_2^{ц\,(1)}}{Э_3^{ц\,(1)} Э^{ц\,(3)}} \left[p_{4,\,6}^2 W_{2\,(a)}^{ц\,(1)} \left(1 - W_{1\,(a)}^{ц\,(1)} W_{2\,(i)}^{ц\,(1)}\right) + p_{2,\,6}^2 W_{1\,(a)}^{ц\,(1)} \left(Э_2^{ц\,(1)}\right)^{-2}\right]; \tag{3-97б}$$

$$W_i^{ц\,(3)} = W_{1\,(i)}^{ц\,(1)} + \frac{Э_2^{ц\,(1)} Э_3^{ц\,(1)}}{Э_1^{ц\,(1)} Э^{ц\,(3)}} \left[p_{1,\,3}^2 W_{2\,(i)}^{ц\,(1)} \left(1 - W_{2\,(a)}^{ц\,(1)} W_{3\,(i)}^{ц\,(1)}\right) + p_{1,\,5}^2 W_{3\,(i)}^{ц\,(1)} \left(Э_2^{ц\,(1)}\right)^{-2}\right], \tag{3-97в}$$

где $p_{\alpha,\,\beta} = \rho_\alpha / \rho_\beta$; $W_{j\,(a),\,(i)}^{ц\,(1)}$ ($j = 1, 2, 3$) определяются по формуле 3-7 5в); $Э_j^{ц\,(1)}$ ($j = 1, 2, 3$) — по (3-75а).

Цилиндры многослойные.

Пользуясь методикой, изложенной в работе [10], получим следующие рекуррентные соотношения, позволяющие найти эффективность экранирования $(\nu - 1)$-слойного экрана и функции обратного действия;

$$Э^{ц\nu} = Э^{ц\,(\nu-1)} Э_\nu^{(1)} \left[1 - p_{\nu,\,\nu+1}^2 W_a^{ц\,(\nu-1)} W_{\nu\,(i)}^{ц\,(1)}\right]; \tag{3-98а}$$

$$W_a^{ц\nu} = W_{\nu\,(a)}^{ц\,(1)} + W_a^{ц\,(\nu-1)} \frac{Э^{ц\,(\nu-1)}}{Э^{ц\nu} Э_\nu^{ц\,(1)}} p_{\nu,\,\nu+2}^2. \tag{3-98б}$$

Выражения для $Э_{\nu}^{\text{ц}\,(1)}$ и $W_{\nu\,(a),\,(i)}^{\text{ц}\,(1)}$ можно получить из формул (3-75).

Плоские оболочки.

Пластины однослойные. Решение проводится в координатах (x, y, z) (рис. 2-13, где z_3, $z_4 \to \infty$). Проводящая плоская бесконечно протяженная пластина с параметрами μ_1, γ_1 окружена диэлектрической средой с параметрами μ_0, $\gamma_0 = 0$. Координаты внутренней и наружной поверхностей обозначим через $z = z_1$ и $z = z_2$, толщину стенки — через Δ_1. Материал экрана и среда являются однородными и изотропными. Источником служит однородное электромагнитное поле с магнитной напряженностью $\mathbf{H}^{(0)}$.

Эффективность экранирования плоской пластиной в широком диапазоне частот [17]

$$Э^{\text{п}\,(1)} = 0{,}25\left\{\left[(2/a + a)^2 + 4\right]\operatorname{ch}(2\Delta_1/\delta) + 4\,(2/a + a)\operatorname{sh}(2\Delta_1/\delta)\right] - \\ - \left[(2/a - a)^2 - 4\right]\cos(2\Delta_1/\delta) - 4\,(2/a - a)\sin(2\Delta_1/\delta)\right\}^{0,5}, \quad (3\text{-}99)$$

где $\delta = [2/(\omega\mu_1\gamma_1)]^{0,5}$ — эквивалентная глубина проникновения; $a = [2\gamma_1/(\omega\varepsilon_0\mu_1)]^{0,5}$; ε_0 — электрическая постоянная.

Формула (3-99) после освобождения от тригонометрических и гиперболических функций может быть представлена в виде

$$Э^{\text{п}\,(1)} = \{(1 + a + i)^2\exp[(1 + i)(\Delta_1/\delta)] - (1 - a + i)^2\exp[-(1 + i)\times \\ \times(\Delta_1/\delta)]\}\{(1 + a - i)^2\exp[(1 - i)(\Delta_1/\delta)] - \\ - (1 - a - i)^2\exp[-(1 - i)(\Delta_1/\delta)]\}/[4a(1 - i)]. \quad (3\text{-}100)$$

При больших a для всех экранов, за исключением сверхтонких ($2\Delta_1/\delta \to 0$), справедлива формула

$$Э^{\text{п}\,(1)} \approx 0{,}25a\,[\operatorname{ch}(2\Delta_1/\delta) - \cos(2\Delta_1/\delta)]^{0,5}. \quad (3\text{-}101)$$

При относительно низких частотах

$$Э^{\text{п}\,(1)} \approx 1 + [\Delta_1 a/(2\delta)] \approx \gamma_1\Delta_1/\left(2\varepsilon_0^{0,5}\right). \quad (3\text{-}102)$$

В этом выражении пренебрегли единицей по сравнению со вторым членом. Формула (3-102) удобна в приблизительных расчетах эффективности экранирования плоским экраном.

Для расчета эффективности экранирования бесконечно длинными проводящими немагнитными пластинами конечной толщины можно воспользоваться формулой

$$Э^{\text{п}\,(1)} = [2\zeta_0\zeta\cos(k\Delta_1)] + i\left(\zeta_0^2 + \zeta^2\right)\sin[k\Delta_1/(2\zeta_0\zeta)], \quad (3\text{-}103)$$

где $\zeta_0 = 120\pi$; $\zeta = [\omega\mu_1/(2\gamma_1)]^{0,5}(1 + i)$; $k = (1 + i)/\delta$; $\delta = [2/(\omega\mu_1\gamma_1)]^{0,5}$.

Для оценочных расчетов эффективности экранирования плоскими пластинами можно использовать формулу [27]

$$\left|Э^{\text{п}\,(1)}\right| = 60\pi\Delta_1\gamma_1\left|\frac{\operatorname{sh}[(1 + i)(\Delta_1/\delta)]}{(1 + i)(\Delta_1/\delta)}\right|. \quad (3\text{-}104)$$

В ряде случаев удобнее пользоваться приближенной формулой, полученной из (3-104),

$$\left|Э^{п\,(1)}\right| \approx 60\pi\Delta_1\gamma_1 \begin{cases} 1, & \Delta_1/\delta < 0{,}1; \\ \delta e^{\Delta_1/\delta}/(2\sqrt{2}\,\Delta_1), & \Delta_1/\delta > 1. \end{cases} \qquad (3\text{-}105)$$

Если необходимо снизить напряженность $\mathbf{H}^{(0)}$ внешнего электромагнитного поля между пластинами (рис. 3-2), можно воспользоваться формулой [10]

$$Э^{п\,(1)} = \mathrm{ch}\,(k\Delta_1) + 0{,}5K\,\mathrm{sh}\,(k\Delta_1), \qquad (3\text{-}106)$$

где $k = (1+i)/\delta$; $K = ka/\nu_{1,0}$; a — расстояние между пластинами. При учете поверхностного эффекта для $\delta < \Delta_1$, $\mathrm{ch}\,(k\Delta_1) = \mathrm{sh}\,(k\Delta_1) \approx 0{,}5\exp(k\Delta_1)$

$$Э^{п\,(1)} = \exp(k\Delta_1)\,(2+K)/4. \qquad (3\text{-}107)$$

Поле за плоским экраном, как и поле помех, является однородным. В связи с тем, что эффективность экранирования в общем случае является комплексным числом, имеется фазовый сдвиг между внутренним и внешним полями. При использовании экрана из ферромагнитного материала следует рассчитать эффективное значение магнитной проницаемости, в котором учитывается магнитный поверхностный эффект:

$$\mu_{эф} = \frac{2\mu_1}{k\Delta_1}\,\mathrm{th}\,\frac{k\Delta_1}{2} \approx \begin{cases} \mu_1, & \Delta_1 < 2\delta; \\ \mu_1(1-i)(\delta/\Delta_1), & \Delta_1 > 2\delta. \end{cases} \qquad (3\text{-}108)$$

Из (3-108) можно определить граничную частоту, при которой $\Delta_1 = 2\delta$. При частотах, бóльших этого граничного значения, эффективное значение магнитной проницаемости имеет фазовый угол φ, который с увеличением частоты стремится к 45°.

Пластины двухслойные. Эффективность экранирования двухслойной плоской оболочкой (рис. 2-13) не равна произведению эффективности экранирования двумя однослойными пластинами. Действительно, поток электромагнитной энергии, проникающий сквозь первый слой, претерпевает бесконечный ряд отражений в пространстве между слоями. В результате сквозь второй слой проникает значительно бóльшая часть потока, чем в том случае, когда после первого отражения поток энергии более не возвращается к этому слою.

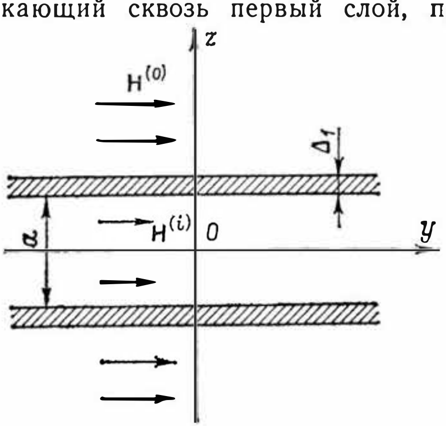


Рис. 3-2. Плоские оболочки в продольном однородном магнитном поле

Эффективность экранирования двухслойным плоским экраном можно представить в виде [27]

$$Э^{п\,(2)} = Э_1^{п\,(1)} Э_2^{п\,(1)} \left[1 - \tilde{q}_1 \tilde{q}_2 \exp\left(-i\,\frac{4\pi\Delta_{1,\,2}}{\lambda}\right)\right], \qquad (3\text{-}109)$$

где

$$\tilde{q}_j = q_j\,\frac{1 - \exp\left[-2\,(1+i)\,(\Delta_j/\delta_j)\right]}{1 - q_j^2 \exp\left[-2\,(1+i)\,(\Delta_j/\delta_j)\right]}, \quad j = 1,\ 2; \qquad (3\text{-}110)$$

δ_j и Δ_j — глубина поверхностного слоя и толщина экранирующего слоя ($j = 1,\ 2$); $q_j = 4k_j/(k_j+1)^2$ — коэффициент отражения; k_j — волновое число для j слоя; $\Delta_{1,\,2}$ — расстояние между слоями; λ — длина волны. Если оба слоя изготовлены из материала одинаковых параметров и толщины, то

$$Э^{п\,(2)} = Э_1^{п\,(1)\,2} \left[1 - \tilde{q}_1^2 \exp\left(-i\,\frac{4\pi\Delta_{1,\,2}}{\lambda}\right)\right]. \qquad (3\text{-}111)$$

Воспользовавшись этой формулой, можно ответить на вопрос, какой экран более эффективен — двухслойный или однослойный с удвоенной толщиной слоя.

Формула (3-111) выведена на базе теории длинной линии. Если воспользоваться теорией цепи, то для эффективности экранирования двухслойным экраном получим ($\Delta = \Delta_1 = \Delta_2$)

$$Э^{п\,(2)} = [\gamma/(i\omega\varepsilon_0)]^{0,5}\,\mathrm{sh}\,(k\Delta)\,[\mathrm{ch}\,(k\Delta) + k\Delta_{1,\,2}\,\mathrm{sh}\,(k\Delta)], \qquad (3\text{-}112)$$

где $\Delta_{1,\,2}$ — расстояние между слоями.

Оболочки с концентрическим металлическим включением.

Сферическая оболочка.

1. Оболочка со сплошным включением. Проводящая ферромагнитная сферическая оболочка находится в однородном пульсирующем электромагнитном поле. В ее полости расположена область со сплошным ферромагнитным включением (рис. 2-14), которую можно считать непроводящей электрический ток.

При расчете эффективности экранирования сферической оболочкой металлическое включение заменяется концентрическим сферическим с магнитной проницаемостью $\mu_в$ и эквивалентным радиусом $R_в = \{V_в \cdot [(4/3)\pi]\}^{1/3}$, где $V_в$ — объем включения.

Тогда, используя результаты работ [1, 2], получим

$$Э_в^{с\,(1)} = \mathrm{ch}\,(\alpha\Delta_1) + (1/3)\left[K\left(1 - 2p_{в,\,1}^3 W_в^{с\,(1)}\right) + (2/K) \times \right.$$
$$\left. \times \left(1 + p_{2,\,1}^3 W_в^{с\,(1)}\right)\right]\mathrm{sh}\,(\alpha\Delta_1), \qquad (3\text{-}113)$$

где $\alpha = [k^2 + (2/R_1^2)]^{0,5}$; $p_{в,\,1} = R_в/R_1$; $K = \alpha R_1/\nu_{1,\,0}$; $\nu_{1,\,0} = \mu_1/\mu_0$; $W_в^{с\,(1)} = -(\mu_в - \mu_0)/(\mu_в + 2\mu_0)$ — функция обратного действия сплошного включения; k — волновое число.

Для многих случаев $\mu_в \gg \mu_0$ и $W_в^{с\,(1)} \to -1$, тогда

$$Э_в^{с\,(1)} = \mathrm{ch}(\alpha\Delta_1) + (1/3)\left[K\left(1 + p_{в,\,1}^3\right) + (2/K)\left(1 + p_{в,\,1}^3\right)\right]\mathrm{sh}(\alpha\Delta_1). \tag{3-114}$$

Отметим, что при $\mu_1 = \mu_0$ и $|K| \gg 1$ вторым членом в квадратных скобках можно пренебречь из-за малости по сравнению с первым. Вследствие этого при $W_в^{с\,(1)} = -1$ экранирующий эффект получается бо́льшим, чем рассчитанный по формуле (3-35а). При $\mu \gg \mu_0$ и $|K| \ll 1$ — режим магнитостатический, эффективность экранирования окажется меньше вычисленной по формуле (2-29). Поэтому экранирующие оболочки, в полости которых будут устанавливаться ферромагнитные массы, необходимо делать из немагнитных хорошо проводящих материалов.

При достаточно высоких частотах ($f > 10^5$ Гц) на поверхности металлического включения можно задаться граничными условиями М. А. Леонтовича (1-44). Тогда, считая оболочку тонкостенной со средним радиусом $R_0 = (R_1 + R_2)/2$, получим

$$Э_в^{с\,(1)} = \frac{4qpR_0^{-1} - 3\,(p - q) - 2R_0}{3\,(p + q)\left(0{,}5p_{в,\,0}^3 - 1\right)}, \tag{3-115}$$

где $p_{в,\,0} = R_в/R_0$; $p = \mu_1\Delta_1/(2\mu_0)$; $q = 2/(i\omega\mu_0\gamma_1\Delta_1)$.

При отсутствии металлического тела в полости оболочки необходимо положить в (3-115) $R_в \to 0$:

$$Э^{с\,(1)} = \left[4qpR_0^{-1} - 3\,(p - q) - 2R_0\right]/\left[3\,(p + q)\right],$$

что соответствует формуле (3-50).

2. Оболочка с полым включением. Это может произойти при использовании нескольких концентрических оболочек. В этом случае необходимо оценить, как влияют на внешнюю оболочку все остальные, которые сейчас рассматриваются как оболочки с металлическим включением. При расчете можно воспользоваться методикой, изложенной в § 3-1. Для эффективности экранирования сферической оболочкой с полым металлическим включением получим ($n = 1$)

$$\begin{aligned} Э_в^{с\,(1)} = \Big\{&p_{в,\,0}^3\left(1 + 4pqR_0^{-2}\right)\left(1 + 4p_в q_в R_в^{-2}\right) - \\ &- \left[2pqR_0^{-2} + 3\,(2R_0)^{-1}(q - p) - 1\right]\left[2p_в q_в R_в^{-2} + 3\,(2R_в)^{-1} \times \right.\\ &\left.\times (q_в - p_в) - 1\right]\Big\}\Big\{3\,(p + q)\,(2R_0)^{-1}\Big\{\left[2p_в q_в R_в^{-2} + 3\,(2R_в)^{-1} \times \right.\\ &\left.\times (q_в - p_в) - 1\right] - 0{,}5p_{в,\,0}^3\left(4pqR_0^{-2} + 1\right)\Big\}\Big\}^{-1}. \end{aligned} \tag{3-116}$$

Формула (3-116) может быть проанализирована при разных соотношениях параметров p, q самой оболочки и $p_в = \mu_в\Delta_в/(2\mu_0)$, $q_в = 2/(i\omega\mu_0\gamma_в\Delta_в)$ области с металлическим включением. При удалении этой области из полости экранирующей оболочки получим ($R_в \to 0$) формулу (3-50), как и в предыдущем случае.

Круговая цилиндрическая оболочка.

1. Оболочка со сплошным включением. Проводящий ферромагнитный цилиндрический экран находится в однородном электромагнитном поле напряженностью $\mathbf{H}^{(0)}$. В его полости расположен концентрически сплошной ферромагнитный цилиндр, который можно считать не проводящим электрический ток. Тогда [10] получим

$$Э_{\text{в}}^{\text{ц}\,(1)} = \operatorname{ch}(k_1\Delta_1) + 0{,}5\left[K_1\left(1 - p_{\text{в},\,1}^2 W_{\text{в}}^{\text{ц}\,(1)}\right) + \right.$$
$$\left. + K_1^{-1}\left(1 + p_{\text{в},\,1}^2 W_{\text{в}}^{\text{ц}\,(1)}\right)\right] \operatorname{sh}(k_1\Delta_1) \qquad (3\text{-}117)$$

для электромагнитного поля напряженностью $\mathbf{H}^{(0)}$, направленной перпендикулярно сечению цилиндрического экрана. В этой формуле $k_1 = \left(k^2 + R_1^{-2}\right)^{0,5}$; k — волновое число; геометрические размеры соответствуют рис. 2-15. Если напряженность поля $\mathbf{H}^{(0)}$ направлёна параллельно оси цилиндра, то область с ферромагнитным включением не изменяет эффективности экранирования цилиндром. Последняя определяется из формулы (3-87).

При достаточно высоких частотах ($f > 10^5$ Гц) на поверхности металлического включения можно задаться граничными условиями (1-47) и определить

$$Э_{\text{в}}^{\text{ц}\,(1)} = 2R_2^3 a_1^{(2)}\left\{a_2^{(2)}\left[b_2^{(2)2} + \left(k^4/R_2^4\right) pq b_1^{(2)2}\right] - b_2^{(1)}\left[a_2^{(2)} b_2^{(2)} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(k^4/R_2^4\right) pq a_1^{(2)} b_1^{(2)} + \left(k^2/2R_2^3\right)(q - p)\right]\right\} / \left[k^2 (p + q)\left(a_2^{(1)} b_1^{(2)} - a_1^{(2)} b_2^{(1)}\right)\right], \qquad (3\text{-}118)$$

где $a_1^{(j)} = I_1(kR_j)$, $j \in [1;\ 2]$; $b_1^{(j)} = K_1(kR_j)$; $a_2^{(j)} = I_1'(kR_j)$; $b_2^{(j)} = K_1'(kR_j)$; k — волновое число; $p = \mu_1\Delta_1/(2\mu_0)$; $q = 2/(i\omega\mu_0\gamma_1\Delta_1)$.

2. Оболочка с полым включением. Расчет можно осуществить так же, как для двухслойных цилиндрических оболочек, причем внутренняя оболочка ограничивает область с металлическими включениями. При расчете используем методику, изложенную в § 3-1. Для эффективности экранирования круговой цилиндрической оболочкой с полым включением получим

$$Э_{\text{в}}^{\text{ц}\,(1)} = -\left\{\left[a_2^{(2)} b_2^{(2)} + \left(k^4/R_2^4\right) p_2 q_2 a_1^{(2)} b_1^{(2)} + \left[k^2/\left(2R_2^3\right)\right](q_2 - p_2)\right] \times\right.$$
$$\times \left[a_2^{(1)} b_2^{(1)} + \left(k^4/R_1^4\right) p_1 q_1 a_1^{(1)} b_1^{(1)} + \left[k^2/\left(2R_1^3\right)\right](q_1 - p_1)\right] -$$
$$\left. - a_2^{(1)2}\left(b_2^{(2)2} + p_2 q_2 \left(k^4/R_2^4\right) b_1^{(2)2}\right)\right\} / \left\{\left[k^2/\left(2R_2^3\right)\right](p_2 + q_2) \times\right.$$
$$\times \left[a_2^{(1)} b_2^{(1)} + \left[k^2/\left(2R_1^3\right)\right] q_1\right] - \left(a_1^{(1)} b_1^{(2)} / a_1^{(2)} b_1^{(1)}\right) a_2^{(1)2}\left[\left(k^4/R_2^4\right) p_2 q_2 b_1^{(2)} \times\right.$$
$$\left.\left. \times \left(a_1^{(2)} - b_1^{(2)}\right) + p\left[k/\left(2R_2^3\right)\right] + b_2^{(2)}\left(a_2^{(2)} - b_2^{(2)}\right)\right]\right\}, \qquad (3\text{-}119)$$

где p_j и q_j — параметры внутренней (p_1, q_1) и внешней (p_2, q_2) оболочек.

Сферические оболочки.

Интегральная эффективность экранирования. Эффективность экранирования однослойным сферическим экраном может быть получена на базе теории длинной линии [50]:

$$Э^{c(1)} = p\,[1 - q\exp(-2\alpha\Delta_1)]^{-1}\exp(-\alpha\Delta_1), \tag{3-120}$$

где $p = 4k^2/(k+1)^2$ — коэффициент первичного отражения от обеих поверхностей сферы; $q = (1-k)^2/(1+k)^2$ — коэффициент последующих многократных отражений и переотражений; $\alpha = (1+i)/\delta$ — комплексный коэффициент прохождения электромагнитных волн; $k = Z_w/\eta$; η — внутреннее полное сопротивление материала; $\eta = (1+i)\,\delta$; $\delta = [2/(\omega\mu_1\gamma_1)]^{0,5}$ — глубина поверхностного слоя; Z_w — полное сопротивление падающей волны с напряженностью $\{\mathbf{E};\ \mathbf{H}\}$, перпендикулярной экрану.

Формула (3-120) может использоваться для определения эффективности экранирования однослойными поверхностями, ограниченными полными координатными поверхностями, и только полное волновое сопротивление Z_w определяется методами теории поля.

Произвольная точка в ближнем электромагнитном поле источника содержит векторы напряженности электрического и магнитного полей. Каждый из этих векторов имеет три составляющие с собственной временно́й фазой. Зная их, можно определить скалярное полное волновое сопротивление. В работе [50] определено полное волновое сопротивление в членах матрицы для всех возможных составляющих $\mathbf{E}_i/\mathbf{H}_j$ ($i,\ j = q_1,\ q_2,\ q_3$), где знак каждого отношения $\mathbf{E}_{q_i}/\mathbf{H}_{q_j}$ выбирался в соответствии с положительным направлением действительного вектора Пойнтинга. В сферических координатах (r, θ, φ) такая матрица имеет вид

$$Z_w = \begin{vmatrix} \dfrac{\mathbf{E}_r}{\mathbf{H}_r} & \dfrac{\mathbf{E}_r}{\mathbf{H}_\theta} & -\dfrac{\mathbf{E}_r}{\mathbf{H}_\varphi} \\ -\dfrac{\mathbf{E}_\theta}{\mathbf{H}_r} & \dfrac{\mathbf{E}_\theta}{\mathbf{H}_\theta} & \dfrac{\mathbf{E}_\theta}{\mathbf{H}_\varphi} \\ \dfrac{\mathbf{E}_\varphi}{\mathbf{H}_r} & -\dfrac{\mathbf{E}_\varphi}{\mathbf{H}_\theta} & \dfrac{\mathbf{E}_\varphi}{\mathbf{H}_\varphi} \end{vmatrix}. \tag{3-121}$$

Эта матрица при определенных условиях упрощается.

На основании изложенного в работе [50] найдем:

для элементарного диполя

$$Z_w \approx i\omega\mu_0 z/3, \tag{3-122}$$

где z — координата;

для петли с током

$$Z_w \approx i\omega\mu_0 (a^2 + z^2)/(3z), \tag{3-123}$$

где a — радиус петли с током (см. рис. 3-3);

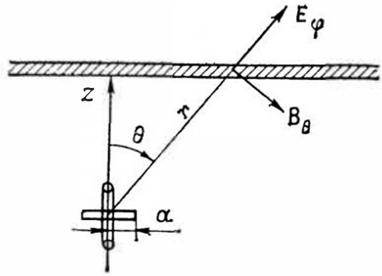


Рис. 3-3. Плоская оболочка под воздействием элементарного источника

для конечного диполя ($l = [d, a]$, где d — расстояние между электрическими зарядами)

$$Z_w \approx i\omega\mu_0 (l^2 + z^2)/(3z). \tag{3-124}$$

Если $a \to 0$, то выражение (3-123) стремится к (3-122).

Эффективность экранирования по гармоникам.

Сферы толстостенные. Сферический экран с внутренним возбуждением произвольно ориентированным и расположенным в пространстве диполем $D[\mathbf{M}_1, \mathbf{r}_1]$ представлен на рис. 3-4, *а*.

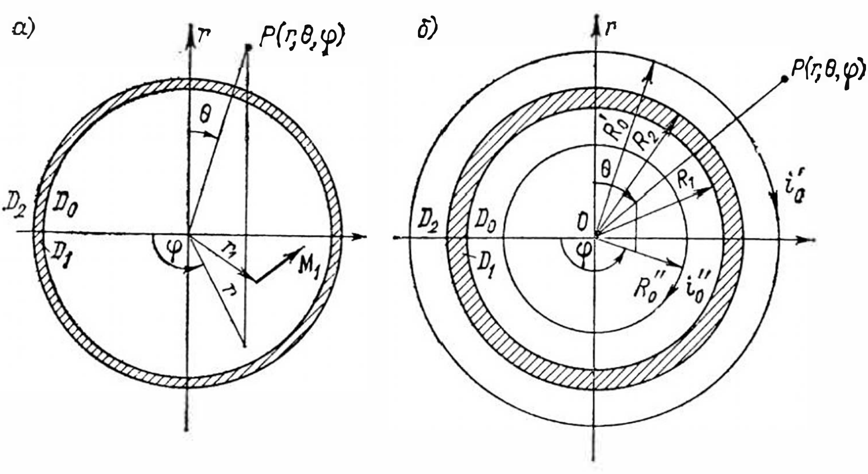


Рис. 3-4. Сферический экран в дипольном магнитном поле (*а*) и в поле петли с током (*б*)

Для определения эффективности экранирования по гармоникам (индекс «m» в решениях не используется из-за симметрии решений по определению напряженности магнитного поля по координате φ) необходимо найти решение уравнения электромагнитного поля для трех областей: области, заключенной внутри экрана; области, занятой металлической стенкой экрана; внешней области за экраном. Расчет напряженности поля в диэлектриках (в полости экрана и за экраном) удовлетворяет уравнению Лапласа для скалярного магнитного потенциала $v_{1,3}$ в системе координат (r, θ, φ). Напряженность электрического поля в проводящей ферромагнитной стенке с параметрами материала μ_1, γ_1 находится из уравнения

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} = -k^2\mathbf{E}, \tag{3-125}$$

где $k^2 = i\omega\mu_1\gamma_1$. Если считать стенки экрана достаточно тонкими по сравнению с другими размерами, то вектор $\mathbf{E}$ будет иметь лишь две составляющие — $\mathbf{E}_\theta$ и $\mathbf{E}_\varphi$, являющиеся функциями координат (r, θ, φ), и составляющую $\mathbf{E}_r = 0$. Уравнение (3-15) решается без учета изменения радиуса по толщине экрана.

Эффективность экранирования $Э_n^{c\,(1)}$ и функции обратного действия по гармоникам $W_{n\,(i)}^{c\,(1)}$ определяются в виде

$$Э_n^{c\,(1)} = \left[p_{1,2}^{n+2}/(2n+1)\right]\{[(n+1)\,p_{2,1} + n]\operatorname{ch}(\alpha\Delta_1) + \\ + [(n+1)/K + Knp_{2,1}]\operatorname{sh}(\alpha\Delta_1)\}; \tag{3-126а}$$

$$W_{n\,(i)}^{c\,(1)} = \left[(n+1)\,p_{1,2}^{n+2}/(2n+1)\,Э_n^{c\,(1)}\right]\left[\left(Kp_{2,1} - K^{-1}\right)\operatorname{sh}(\alpha\Delta_1) - \\ - (p_{2,1} - 1)\operatorname{ch}(\alpha\Delta_1)\right], \tag{3-126б}$$

где $K = \alpha R_1/(n\nu_{1,0})$; $p_{j,\beta} = R_j/R_\beta$; $\alpha = \left[k^2 + n(n+1)/R_1^2\right]^{0,5}$; $\Delta_1 = R_2 - R_1$; R_2, R_1 — внешний и внутренний радиусы экрана; $k^2 = i\mu_1\gamma_1\omega$. Если считать экран тонкостенным и положить $p_{2,1} = (R_1 + \Delta_1)/R_1$ в первой степени равным единице, то

$$Э_n^{c\,(1)} = p_{1,2}^{n+2}\left[\operatorname{ch}(\alpha\Delta_1) + (2n+1)^{-1}\left(\frac{n+1}{K} + Kn\right)\operatorname{sh}(\alpha\Delta_1)\right]; \tag{3-127а}$$

$$W_{n\,(i)}^{c\,(1)} = \frac{n+1}{2n+1}\,p_{1,2}^{n+2}\left(K - K^{-1}\right)\operatorname{sh}(\alpha\Delta_1)\left(Э_n^{c\,(1)}\right)^{-1}. \tag{3-127б}$$

Для тонкостенных экранирующих оболочек можно принять $p_{1,2}^{n+2} \approx 1$, тогда

$$Э_n^{c\,(1)} = \operatorname{ch}(\alpha\Delta_1) + (2n+1)^{-1}\left(\frac{n+1}{K} + Kn\right)\operatorname{sh}(\alpha\Delta_1); \tag{3-128а}$$

$$W_n^{c\,(1)} = \frac{n+1}{2n+1}\left(K - K^{-1}\right)\operatorname{sh}(\alpha\Delta_1)\left(Э_n^{c\,(1)}\right)^{-1}. \tag{3-128б}$$

Формулы (3-127) и (3-128) можно рекомендовать при электромагнитных расчетах в диапазоне частот $f = 10^3 \ldots 10^5$ Гц.

Из выражений (3-127) при $n = 1$, а также при $p_{2,1} = 1$ получаются выражения для эффективности экранирования и функции обратного действия сферическим экраном с расположенным внутри его дипольным источником поля вида (3-35а).

При рассмотрении экрана, изготовленного из проводящего немагнитного материала с параметрами γ_1, μ_0, используя принцип взаимности, с внешним возбуждением (рис. 3-4, *б*) можно свести задачу к уравнению Гельмгольца для некоторой вспомогательной скалярной функции. При решении задачи предполагается, что экран имеет конечную толщину Δ_1, токи в контурах i_0' и i_0'', создающие первичное электромагнитное поле, изменяются во времени синусоидально с угловой частотой ω. Задача решается в квазистационарном приближении.

Эффективность экранирования для данного случая может быть записана в виде

$$Э_n^{c\,(1)} = G/[G + (2/\pi)^{0,5}\, p_{2,1}^{n-0,5}\,(2n+1)]; \qquad (3\text{-}129\text{а})$$

$$W_{n\,(i)}^{c\,(1)} = -R_2^{2n+1}\,(G/F), \qquad (3\text{-}129\text{б})$$

где $G = K_{n+3/2}(kR_1)\, I_{n+3/2}(kR_2) - I_{n+3/2}(kR_1)\, K_{n+3/2}(kR_2)$; $F = K_{n+3/2}(kR_1)\, I_{n-1/2}(kR_2) - I_{n+3/2}(kR_1)\, K_{n-1/2}(kR_2)$; I и K — модифицированные цилиндрические функции первого и второго рода.

Сферы тонкостенные. Используя метод расчета, развитый в § 3-1, для эффективности экранирования однослойными сферическими оболочками по гармоникам и функций обратного действия $W_{n\,(a)}^{c\,(1)}$ из формул (3-16) получим (рис. 2-17, где $R_2 \to \infty$)

$$Э_n^{c\,(1)} = [R_1/(p+q)(2n+1)]\{(q-p)(2n+1)R_1^{-1} + {} $$
$$+ 2pqn(n+1)R_1^{-2} - 2\}; \qquad (3\text{-}130\text{а})$$

$$W_{n\,(i)}^{c\,(1)} = -\frac{2(n+1)\left(1 + pqn^2R_1^{-2}\right)}{n\left[(q-p)(2n+1)R_1^{-1} + 2pqn(n+1)R_1^{-2} - 2\right]}, \qquad (3\text{-}130\text{б})$$

где $p = \mu_1\Delta_1/(2\mu_0)$; $q = 2/(i\omega\gamma_1\mu_0\Delta_1)$.

Если принять $n = 1$, что соответствует помехонесущему полю, создаваемому центральным магнитным диполем $D[\mathbf{M}_1, \mathbf{r}_1 = 0]$, то выражения (3-130) преобразуются в (3-50). Если дополнительно положить, что оболочка проводящая немагнитная ($\mu = \mu_0$), то $p \ll 1$, поэтому

$$Э_n^{c\,(1)} = \frac{R_1}{q(2n+1)}[(2n+1)qR_1^{-1} - 2]; \qquad (3\text{-}131\text{а})$$

$$W_{n\,(a)}^{c\,(1)} = -\frac{2(n+1)}{n\left[(2n+1)qR_1^{-1} - 2\right]}. \qquad (3\text{-}131\text{б})$$

Если оболочку можно считать ферромагнитной непроводящей, то $q \to \infty$:

$$Э_n^{c\,(1)} = \frac{R_1}{2n+1}\left[(2n+1)R_1^{-1} + 2pn(n+1)R_1^{-2}\right] =$$
$$= 1 + \frac{2pn(n+1)}{(2n+1)} R_1^{-1}; \qquad (3\text{-}132\text{а})$$

$$W_{n\,(i)}^{c\,(1)} = -\frac{2(n+1)(p_1/R_1)\,n}{(2n+1) + 2p_1n(n+1)R_1^{-1}}; \qquad (3\text{-}132\text{б})$$

эти формулы соответствуют (2-112).

Эффективность экранирования двухслойными сферическими оболочками с учетом выражений (2-23) и (3-15), получим в виде

$$Э_n^{c\,(2)} = \{[2p_1q_1R_1^{-2}n(n+1) + R_1^{-1}(p_1-q_1)(2n+1)-2]\times \times[2p_2q_2R_2^{-2}n(n+1) + R_2^{-1}(p_2-q_2)(2n+1)-2] - - p_{1,2}^{2n+1}[1+(n+1)^2p_2q_2R_2^{-2}][1+n^2p_1q_1R_1^{-2}]\}/[(p_1+q_1)\times \times(p_2+q_2)(2n+1)^2R_1^{-1}R_2^{-1}]; \quad (3\text{-}133а)$$

$$W_{n\,(i)}^{c\,(2)} = -[n/(n+1)]\{[1+(n+1)^2p_1q_1R_1^{-2}][2p_2q_2R_2^{-2}n(n+1) + +(p_2-q_2)(2n+1)R_2^{-1}-2] - p_{1,2}^{2n+1}[1+(n+1)^2p_2q_2R_2^{-2}]\times \times[2p_1q_1R_1^{-2}(n+1)n + (p_1-q_1)(2n+1)R_1^{-1}-2]\}\times \times\{[2p_1q_1R_1^{-2}n(n+1) + (p_1-q_1)(2n+1)R_1^{-1}-2]\times \times[2p_2q_2n(n+1)R_2^{-2} + (p_2-q_2)(2n+1)R_2^{-1}-2] - - p_{1,2}^{2n+1}[1+(n+1)^2p_2q_2R_2^{-2}][1+n^2p_1q_1R_1^{-2}]\}^{-1}. \quad (3\text{-}133б)$$

При $n=1$ приходим к формулам (3-54) для двухслойных сферических оболочек, находящихся в однородном электромагнитном поле.

Круговые цилиндрические оболочки.

Интегральная эффективность экранирования. Дипольные источники на конечных расстояниях от экрана создают электромагнитные поля с неоднородной напряженностью, которые делают эффективность экранирования зависящей от места расположения диполя и его ориентации, т. е. от факторов, которых не было в однородных полях. Ниже приводятся формулы для расчета эффективности экранирования для трех ортогональных случаев ориентации магнитного диполя $D[\mathbf{M}=\sin\omega t,\ \mathbf{D}]$ относительно круговой цилиндрической оболочки (рис. 2-22). Метод состоит в конструировании приближенного решения для напряженности неоднородного электромагнитного поля применительно к следующим условиям:

глубина поверхностного слоя δ меньше толщины оболочки Δ_1 $(\nu_{1,0}\delta \gg 1)$;

стенки экрана тонки по сравнению с их линейными размерами $(\Delta_1/R_1 \ll 1)$.

К этим условиям добавляются общепринятые: $\mu_1=\text{const}$ и не зависит от напряженности поля; исключаются токи смещения.

Бесконечная цилиндрическая оболочка.

1. Диполь расположен параллельно оси Oz. Используя методику, рассмотренную в § 2-3, для расчета напряженности в областях *1* и *3*, трансформируем область *2* (см. рис. 2-22). Ре-

шения для b_z, b_ρ, удовлетворяющие граничным условиям (2-121) при R_2, имеют вид

$$b_z \approx \nu_{1,0}\beta K_0(\lambda R)\,\lambda^2\{[\exp[ik(R_2-\rho)]+\zeta\exp[-ik(R_2-\rho)]]/(1+\zeta)\}; \tag{3-134}$$

$$b_\rho \approx i\nu_{1,0}\beta(\lambda^3/k)\,K_0(\lambda R)\{[\exp[ik(R_2-\rho)]- -\zeta\exp[-ik(R_2-\rho)]]/(1+\zeta)\}, \tag{3-135}$$

где

$$k=(1+i)/\delta; \quad \xi = ik/(\lambda\nu_{1,0}); \tag{3-136}$$

$$\zeta = [K_0(\lambda R)-\xi K_1(\lambda R)]/[K_0(\lambda R)+\xi K_1(\lambda R)]. \tag{3-137}$$

Из условий (2-121) определяем α, β и эффективность экранирования

$$Э_z^{ц\,(1)} = \left[\frac{2}{\pi}\left(\frac{D}{R}\right)^3 \frac{k\Delta_1}{\sin(k\Delta_1)}\int\limits_0^\infty \frac{K_0(xD/R)\,x^2\,dx}{\cos(k\Delta_1)+\nu_{1,0}\Delta_1 R^{-1}x^2K_0(x)\,I_0(x)}\right]^{-1}. \tag{3-138}$$

Если положить $k\Delta_1 \ll 1$, $\sin(k\Delta_1)\approx k\Delta_1$, $\cos(k\Delta_1)\approx 1$, то формула (3-138) перейдет в (2-122) для случая магнитостатического экранирования.

2. Диполь расположен параллельно оси Ox. Рассмотрение производится аналогично задаче о диполе, параллельном оси Oz, с учетом особенностей, отмеченных при рассмотрении режима магнитостатики диполя, параллельного оси Ox. Эффективность экранирования находится умножением формулы (2-126) на член $k\Delta_1/\sin(k\Delta_1)$:

$$Э_x^{ц\,(1)} = \left\{\frac{1}{\pi}\frac{kR\,(D/R)^3}{\nu_{1,0}\sin(k\Delta_1)}\int\limits_0^\infty\left[K_0(xD/R)+\frac{K_1(xD/R)}{(xD/R)}\right]\times \times\frac{x^2\,dx}{(1+x^2)\,K_1(x)\,I_1(x)}\right\}^{-1}. \tag{3-139}$$

3. Диполь расположен параллельно оси Oy. Анализ начинается заменой $\cos\varphi$ в выражении (2-123) на $\sin\varphi$ и осуществляется так же, как для диполя, параллельного оси Ox. Для эффективности экранирования получим

$$Э_y^{ц\,(1)} = \left\{\frac{1}{\pi}\frac{2R}{\nu_{1,0}}\frac{k\,(D/R)^2}{\sin(k\Delta_1)}\int\limits_0^\infty\frac{K_1(xD/R)\,x\,dx}{(1+x^2)\,K_1(x)\,I_1(x)}\right\}^{-1}. \tag{3-140}$$

Конечная цилиндрическая оболочка.

1. Диполь расположен параллельно оси Oz. Для конечного цилиндра метод состоит в решении уравнений, которые дают хорошее приближение вблизи поверхности цилиндра, включая концы. Решение должно дать удовлетворительное приближение

для напряженности поля в центре цилиндра, имеющего длину, бо́льшую, чем радиус.

Рассмотрим единичный гармонический диполь $D[\mathbf{M} = \sin \omega t,\ \mathbf{D}]$ в точке P, параллельный оси Oz (рис. 2-22). Потенциал $v^{(1)}$ может быть представлен в виде суммы потециалов $v^{(0)}$ — исходного поля диполя и потенциала рассеяния v^s. Предположим, что потенциал v^s вблизи цилиндра, включая области, примыкающие к концам, состоит из уходящих цилиндрических волн, как и в бесконечном цилиндре. Решение представляется в виде [координаты (ρ, φ, z)]

$$v^s = \sum_n \sum_m \varepsilon_m a_{nm} \cos(m\varphi) K_m(\lambda_n \rho) \sin(\lambda_n z),\ \ n \in [0;\ \infty];\ m \in [0;\ \infty], \tag{3-141}$$

где $\lambda_n = (2n+1)(\pi/L)$; $\varepsilon_0 = 1$; $\varepsilon_m = 2$; $m \neq 0$; L — длина цилиндра.

Потенциал исходного поля

$$v^{(0)} = \sum_n \sum_m \varepsilon_m \cos(m\varphi)\, \psi_{nm}(\rho) \sin(\lambda_n z), \tag{3-142}$$

где $\psi_{nm}(\rho)$ рассчитывается непосредственно. В координатах, относящихся к цилиндру,

$$v^{(0)} = z/[4\pi(\rho^2 + D^2 - 2\rho D \cos\varphi + z^2)^{3/2}]. \tag{3-143}$$

Используя выражение

$$(\rho^2 + D^2 - 2\rho D\cos\varphi + z^2)^{-0,5} = \sum_m \varepsilon_m \cos(m\varphi) \times \\ \times \int\limits_0^\infty e^{-zt} J_m(t\rho) J_m(tD)\, dt \tag{3-144}$$

и преобразуя (3-142), получим

$$\psi_{nm}(\rho) = \frac{\lambda_n}{\pi L} \int\limits_0^\infty \frac{J_m(u)\, J_m(uD/\rho)}{\left(\lambda_n^2 \rho^2 + u^2\right)} \left[1 - (-1)^n \frac{u}{\lambda_n \rho} e^{-uL/(2\rho)}\right] u\, du. \tag{3-145}$$

Для области 3

$$v^{(3)} = \sum_n \sum_m \varepsilon_m C_{nm} \cos(m\varphi) I_m(\lambda_n \rho) \sin(\lambda_n z). \tag{3-146}$$

После преобразований, аналогичных (2-119), получим

$$\begin{aligned} b^{(3)}_{\rho,\, nm} &= C_{nm} \lambda_n I'_m(\lambda_n \rho); \quad b^{(3)}_{z,\, nm} = C_{n,\, m} \lambda_n I_m(\lambda_n \rho); \\ b^{(1)}_{\rho,\, nm} &= \psi'_{nm}(\rho) + a_{nm} \lambda_n K'_m(\lambda_n \rho); \\ b^{(1)}_{z,\, nm} &= \lambda_n \psi_{nm}(\rho) + a_{nm} \lambda_n K_m(\lambda_n \rho). \end{aligned} \tag{3-147}$$

Составляющие магнитной индукции в точке O

$$\mathbf{B}^{(3)}_z(0) = \sum_n \lambda_n C_{n0}, \quad n \in [0;\ \infty]. \tag{3-148}$$

Поле в оболочке может быть выражено приближенными потенциалами, как и для бесконечного цилиндра. Можно показать, что использование приближенного анализа сводится к снижению напряженности поля в центре цилиндра с помощью выражения $k\Delta_1/\sin(k\Delta_1)$:

$$Э_z^{ц(1)} = \left[\frac{4R}{L}\left(\frac{D}{R}\right)^3 \frac{k\,\Delta_1}{\sin(k\,\Delta_1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 R^2\left[K_0(\lambda_n D) - (-1)^n g_n(D/R,\ L/R)\right]}{1 + \nu_{1,0}\Delta_1 R \lambda_n^2 K_0(\lambda_n R)\, I_0(\lambda_n R)}\right]^{-1}, \tag{3-149}$$

где $g_n(D/R, L/R)$ определяется на основании уравнения (2-138).

2. Диполь расположен параллельно оси Ox. Анализ проводится так же, как для диполя, расположенного параллельно оси Oz.

Эффективность экранирования в точке O корректируется, по сравнению с эффективностью экранирования (2-141) в режиме магнитостатики, коэффициентом $k\Delta_1/\sin(k\Delta_1)$:

$$Э_x^{ц(1)}(0) = \left\{\frac{2R^2}{\nu_{1,0}L}\left(\frac{D}{R}\right)^3\left[h(D/R,\ L/R) + \sum_{n=1}^{n} h_n(D/R,\ L/R)\right] \times \frac{k}{\sin(k\Delta_1)}\right\}^{-1}, \tag{3-150}$$

где коэффициенты $h(D/R,\ L/R)$, $h_n(D/R,\ L/R)$ определяются с помощью выражения (2-142).

Формула (3-150) с учетом (2-142) трудоемка для инженерных расчетов. Поэтому с достаточной точностью можно воспользоваться формулой (3-139), выведенной для бесконечного цилиндра.

3. Диполь расположен параллельно оси Oy. Как и для диполя, параллельного оси Ox, результаты расчета эффективности экранирования конечным цилиндром хорошо согласуются с результатами расчета экранирования бесконечным цилиндром. Поэтому, не прибегая к усложнению выражений, можно воспользоваться формулой (3-140).

Эффективность экранирования по гармоникам.

Цилиндры круговые толстостенные.

а. Возбуждение мультиполем. Круговой цилиндрический экран с внутренним возбуждением бесконечно длинным мультиполем представлен на рис. 3-5. Решение задачи осуществляется в системе координат (r, φ, z).

Проводящий экран расположен коаксиально с мультиполем и со всех сторон окружен средой с магнитной проницаемостью μ_0 и $\gamma_0 = 0$. Радиусы внутренней и наружной поверхностей экрана ρ_1 и ρ_2, толщина стенки Δ_1. Материал экрана и окружающая среда считаются однородными и изотропными. Материал экрана имеет параметры μ_1 и γ_1.

Метод составления и решения дифференциальных уравнений, описывающих процессы в экране, изложен в работе [6].

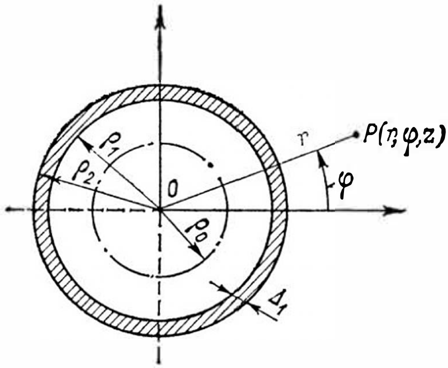


Рис. 3-5. Круговой цилиндрический экран в поле мультиполя

Если считать экран тонкостенным ($\Delta_1 \ll \rho_1$), то экранирующие функции по гармоникам можно записать в виде

$$Э_n^{ц(1)} = \left[1/\left(2p_{2,1}^{n+1}\right)\right]\left\{\left(p_{2,1}+1\right)\operatorname{ch}\left(\alpha\Delta_1\right) + \left(p_{2,1}K_1 + K_1^{-1}\right)\operatorname{sh}\left(\alpha\Delta_1\right)\right\}; \tag{3-151}$$

$$W_{n(i)}^{ц(1)} = \left[1/\left(2p_{2,1}^{n+1}\right)\right]\left[\left(p_{2,1}K_1 - K_1^{-1}\right)\operatorname{sh}\left(\alpha\Delta_1\right) - \left(p_{2,1}-1\right) \times \right.$$
$$\left. \times \operatorname{ch}\left(\alpha\Delta_1\right)\right]\left(Э_n^{ц(1)}\right)^{-1}, \tag{3-152}$$

где $p_{2,1} = \rho_2/\rho_1$; $K_1 = \alpha\rho_1/(n\nu_{1,0})$; $\nu_{1,0} = \mu_1/\mu_0$; $\alpha = [k^2 + (n/\rho_1)^2]^{0.5}$.

При $n = 1$ (дипольное поле) выражения (3-151) и (3-152) соответствуют ранее использованным (3-75).

При написании формул (3-152) принято считать экран тонкостенным, поэтому в уравнении (3-76) для нахождения $\mathbf{E}_z$ сделаны упрощения:

$$\mathbf{E}_z = (A_n e^{\alpha r} + B_n e^{-\alpha r}) \sin n\varphi. \tag{3-153}$$

Решая уравнение (3-76) без упрощений, получим

$$\mathbf{E}_z = [A_n I_n(x) + B_n K_n(x)] \sin n\varphi, \tag{3-154}$$

где $I_n(x)$ и $K_n(x)$ — модифицированные цилиндрические функции первого и второго рода n-го порядка; $x = r(\omega\mu_1\gamma_1)^{0.5} \times \exp(\pm i3\pi/4)$; $\varphi = 3\pi/4$ — аргумент; $|x|$ — модуль.

С учетом (3-154) функции экранирования записываются в виде

$$Э_n^{ц(1)} = \frac{\pi\left(A^{(2)}_{n,n-1}B^{(1)}_{n,n+1} - A^{(1)}_{n,n+1}B^{(2)}_{n,n+1}\right)}{4\nu_{1,0}p_{2,1}^{n}}; \tag{3-155а}$$

$$W_{n(i)}^{ц(1)} = \frac{B^{(2)}_{n,n-1}A^{(1)}_{n,n-1} - B^{(1)}_{n,n-1}A^{(2)}_{n,n+1}}{A^{(2)}_{n,n-1}B^{(1)}_{n,n+1} - A^{(1)}_{n,n+1}B^{(2)}_{n,n-1}}, \tag{3-155б}$$

где $A^{j}_{i,k} = (\nu_{1,0} - 1)K_i(x_j) + (x_j/i)K_k(x_j)$; $B^{j}_{i,k} = (\nu_{1,0} - 1) \times I_i(x_j) + (x_j/i)I_k(x_j)$.

Как уже отмечалось, формулы (3-155) справедливы для бесконечных круговых цилиндрических оболочек с произвольными радиусами стенок из проводящих ферромагнитных материалов, используемых в широком диапазоне частот электромагнитных полей. Пользоваться ими затруднительно при модулях аргумента больше 10. Поэтому выражения (3-155) целесообразно преобразовать [6] для освобождения от цилиндрических функций:

$$Э_n^{ц\,(1)} = \left[M_{1s} \sin(\alpha' \Delta_1) + M_{2s} \cos(\alpha' \Delta_1)\right] (x_1 x_2)^{0,5} / (2 p_{2.\,1}^n n \nu_{1,\,0}); \quad (3\text{-}156а)$$

$$W_{n\,(i)}^{ц\,(1)} = [M_{1w} \sin(\alpha' \Delta_1) + M_{2w} \cos(\alpha' \Delta_1)] / [M_{1s} \sin(\alpha' \Delta_1) + M_{2s} \cos(\alpha' \Delta_1)], \quad (3\text{-}156б)$$

где $\alpha' = (-i\omega\mu_1\gamma_1)^{0,5}$; выражения для M_{1s}, M_{2s}, M_{1w}, M_{2w} приведены в приложении.

б. Возбуждение системой токов. Примером может служить плоскопараллельное поле трехфазной системы токов $\mathbf{i}_A$, $\mathbf{i}_B$, $\mathbf{i}_C$ (рис. 3-6), находящихся внутри или вне круговой цилиндрической оболочки.

Экранирующие функции цилиндра с внутренним возбуждением записываются в виде

$$Э_n^{ц\,(1)} = p_{1,\,2}^n \{k\rho_2 [I_n(k\rho_1) K_{n-1}(k\rho_2) + K_n(k\rho_1) I_{n-1}(k\rho_2)] +$$
$$+ [k^2 \rho_1 \rho_2 / (2_n)] [I_{n-1}(k\rho_2) K_{n-1}(k\rho_1) - I_{n-1}(k\rho_1) K_{n-1}(k\rho_2)]\}; \quad (3\text{-}157а)$$

$$W_{n\,(i)}^{ц\,(1)} = p_{1,\,2}^n \left[k^2 \rho_1 \rho_2 / (2n)\right] \left[I_{n-1}(k\rho_2) K_{n-1}(k\rho_1) - \right.$$
$$\left. - I_{n-1}(k\rho_1) K_{n-1}(k\rho_2)\right] \left(Э_n^{ц\,(1)}\right)^{-1}. \quad (3\text{-}157б)$$

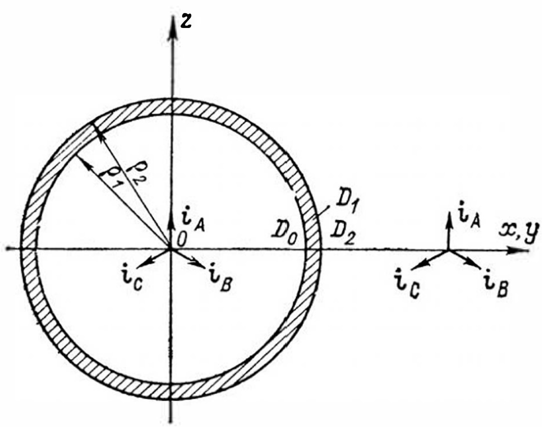


Рис. 3-6. Круговой цилиндрический экран в поле трехфазной системы токов

Если $k\rho \gg 1$, то

$$Э_n^{ц(1)} = p_{1,2}^n \left\{\left[\left(\nu_{1,0}^2 - 1\right) n^2 + k^2 \rho_1 \rho_2\right] \operatorname{sh}(k\Delta_1) + \left[n(\nu_{1,0} - 1) k\rho_1 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + n(1 + \nu_{1,0}) k\rho_2\right] \operatorname{ch}(k\Delta_1)\right\} \left(2\nu_{1,0} nk \sqrt{\rho_1\rho_2}\right)^{-1}. \qquad (3\text{-}158)$$

При $\Delta_1 \ll \rho_{1,0} \gg 1$, где $\rho = 0{,}5(\rho_1 - \rho_2)$,

$$Э_n^{ц(1)} = \left[\operatorname{ch}(k\Delta_1) + 0{,}5\left(\frac{k\rho}{n\nu_{1,0}} + \frac{\nu_{1,0} n}{k\rho}\right) \operatorname{sh}(k\Delta_1)\right]\left(1 + 2n\frac{\Delta_1}{\rho}\right)^{-1}, \qquad (3\text{-}159а)$$

что с точностью до множителя $(1 + 2n\Delta_1/\rho)^{-1}$ совпадает с выражением (3-75а). При этом

$$W_{n(i)}^{ц(1)} = \left\{\left[n^2(\nu_{1,0} - 1)^2 - k^2\rho_1\rho_2\right] \operatorname{sh}(k\Delta_1) + n(\nu_{1,0} - 1) k\Delta_1 \operatorname{ch}(k\Delta_1)\right\} \times$$
$$\times \left\{\left[n^2\left(\nu_{1,0}^2 - 1\right) + k^2\rho_1\rho_2\right] \operatorname{sh}(k\Delta_1) + nk(2\nu_{1,0}\rho + \Delta_1) \operatorname{ch}(k\Delta_1)\right\}^{-1}. \qquad (3\text{-}159б)$$

Для $W_{n(a)}^{ц(1)}$ выражение приобретает вид

$$W_{n(a)}^{ц(1)} = \left\{\left[n^2(\nu_{1,0} + 1)^2 - k^2\rho_1\rho_2\right] \operatorname{sh}(k\Delta_1) - n(\nu_{1,0} + 1) k\Delta_1 \times\right.$$
$$\left.\times \operatorname{ch}(k\Delta_1)\right\}\left\{\left[n^2\left(\nu_{1,0}^2 - 1\right) + k^2\rho_1\rho_2\right] \operatorname{sh}(k\Delta_1) + \right.$$
$$\left. + nk(2\nu_{1,0}\rho + \Delta_1) \operatorname{ch}(k\Delta_1)\right\}^{-1}.$$

При $\nu_{1,0} \gg 1$ и $\rho_1\rho_2 \approx \rho^2$; $W_{n(a)}^{ц(1)}$ и $W_{n(i)}^{ц(1)}$ представляются одним и тем же приближенным выражением

$$W_{n(a),(i)}^{ц(1)} = \frac{0{,}5\left\{[\nu_{1,0} n/(k\rho)] - [k\rho/(n\nu_{1,0})]\right\} \operatorname{sh}(k\Delta_1)}{\operatorname{ch}(k\Delta_1) + 0{,}5\left\{[n\nu_{1,0}/(k\rho)] + [k\rho/(n\nu_{1,0})]\right\} \operatorname{sh}(k\Delta_1)}. \qquad (3\text{-}160)$$

Формула (3-160) совпадает с (3-75б). При условии $k \to 0$ ($k\rho \ll 1$), которое физически означает, что влияние вихревых токов несущественно, $Э_n^{ц(1)}$ и $W_{n(a),(i)}^{ц(1)}$ представляются в виде

$$Э_n^{ц(1)} = [1/(4\nu_{1,0})]\left[(\nu_{1,0} + 1)^2 - (\nu_{1,0} - 1)^2 p_{1,2}^{2n}\right]; \qquad (3\text{-}161а)$$

$$W_{n(a),(i)}^{ц(1)} = \left(\nu_{1,0}^2 - 1\right)\left(p_{1,2}^n - p_{2,1}^n\right) / \left[(\nu_{1,0} - 1)^2 p_{1,2}^n - (\nu_{1,0} + 1)^2 p_{2,1}^n\right]. \qquad (3\text{-}161б)$$

При $\rho_2 \gg \rho_1$, как и при $\rho_1 \to 0$, получим

$$W_{a,i}^{ц(1)} = -(\nu_{1,0} - 1)/(\nu_{1,0} + 1).$$

При $\Delta_1 \ll \rho$ и $\nu_{1,0} \gg 1$, пренебрегая членами порядка малости выше, чем Δ_1/ρ, получим

$$Э_n^{ц(1)} = 1 + [\nu_{1,0} n\Delta_1/(2\rho)]. \qquad (3\text{-}162)$$

При $n = 1$ эффективность экранирования $Э^{ц(1)}$ соответствует выражению (2-86) при магнитостатическом экранировании.

Из рассмотрения следует, что экранирующие функции круговых цилиндрических экранов по гармоникам не зависят от относительного расположения экрана и системы токов. Представление эффективности экранирования по гармоникам целесообразно при исследовании экранов с произвольным расположением системы токов.

Цилиндры круговые тонкостенные. Используя метод, развитый в § 3-1, а также формулы (3-16), полученные при рассмотрении задачи, и $F_{nm}(q_1) = I_m(\lambda p)$; $P_{nm}(q_1) = \widetilde{K}_m(\lambda\rho)$; $\Delta_1 = \rho_1^{-1}$; $Y_{nm}(q_2, q_3) = \exp(i\lambda z + im\varphi)$; $G^{\text{ц}}_{nm} = -(m^2/\rho_1^2 + \lambda^2)$; $n = \lambda\,(-\infty < \lambda < \infty)$; $m = 0;\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$, для эффективности экранирования $Э^{\text{ц}(1)}_{\lambda, m}$ и функции обратного действия $W^{\text{ц}(1)}_{\lambda, m(i)}$ получим ($\rho < \rho_1$)

$$Э^{\text{ц}(1)}_{\lambda, m} = [(q-p)(m^2+\nu_1^2)\rho_1^{-1} + 2pq\rho_1^{-2}(m^2+\nu_1^2)^2 K_m \times \times(\nu_1) I_m(\nu_1) + 2\nu_1^2 K'_m(\nu_1) I'_m(\nu_1)]\,[(p+q)(m^2+\nu_1^2)\rho_1^{-1}]^{-1}; \quad (3\text{-}163а)$$

$$W^{\text{ц}(1)}_{\lambda, m(i)} = -\{2[\nu_1^2(K'_m(\nu_1))^2 + pq\rho_1^{-2}(m^2+\nu_1^2)^2(K_m(\nu_1))^2] \times \times [I_m(|\lambda|\rho)/K_m(|\lambda|\rho)]\}\,\{[(q-p)(m^2+\nu_1^2)\rho_1^{-1} + 2pq\rho_1^{-2} \times \times (m^2+\nu_1^2)^2 K_m(\nu_1) I_m(\nu_1) + 2\nu_1^2 K'_m(\nu_1) I'_m(\nu_1)]\}^{-1}, \quad (3\text{-}163б)$$

где $\nu_1 = |\lambda|\rho_1$.

Плоские оболочки.

Интегральная эффективность экранирования. В качестве источника поля может выступать диполь $D[\mathbf{M}_1, \mathbf{r}_1]$, произвольно расположенный и ориентированный относительно бесконечной плоской пластины произвольной толщины, но на конечных расстояниях от нее: петля с током, проводник, пара проводников и т. д.

Использование метода теории поля для расчета эффективности экранирования плоской бесконечной пластиной, возбуждаемой петлей с током (рис. 3-7) с параметрами μ_1 и γ_1 приводит к формуле

$$Э^{\text{п}(1)} = \frac{1}{4\nu_{1,0}} \frac{\int\limits_0^\infty (x^2/\tau_0)\, J_1(xa) \exp(-\tau_0 z)\, dx}{\int\limits_0^\infty c\,(x^2/\tau)\, J_1(xa) \exp[-\tau_0 z - (\tau-\tau_0)\Delta_1]\, dx}, \quad (3\text{-}164)$$

где $c = \{(K+\nu_{1,0})^2 - (K-\nu_{1,0})^2 \exp(-2\Delta_1\tau)\}^{-1}$; $K = \tau/\tau_0$; $\nu_{1,0} = \mu_1/\mu_0$; Δ_1 — толщина пластины; x — параметр; a — радиус петли с током; z — расстояние от источника до точки, в которой измеряется напряженность поля ($z = l_1 + l_2$); $\tau = (x^2 - k^2)^{0,5}$ — коэффициент передачи в материале экрана; $\tau_0 = (x^2 - k_0^2)^{0,5}$ — коэффициент передачи в свободной среде; k и k_0 — волновые числа в среде ($k^2 = i\omega\mu_1\gamma_1$) и в свободном пространстве ($k_0 = 2\pi/\lambda_0$); λ_0 — длина волны.

Для интеграла (3-164) решение в замкнутой форме не известно, поэтому он оценивается численно. Чтобы выполнить это,

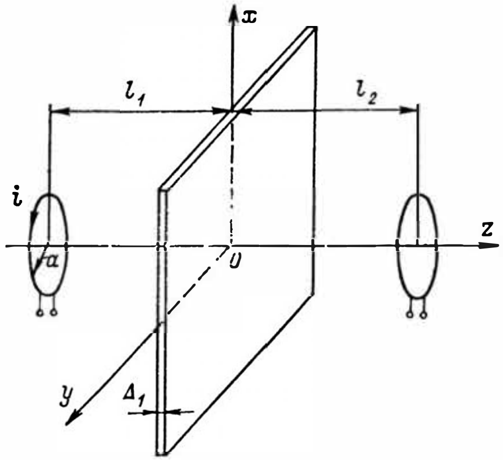


Рис. 3-7. Плоская пластина в поле петли с током

область интегрирования не должна быть сингулярной. Этого можно достигнуть изменением верхнего предела, например, на Q/z, где Q — число ($Q \geqslant 10$). Это число достаточно велико для интегрирования с учетом экспоненциальной части. Вместо нижнего числа можно использовать k_0, поскольку $x^2 J_1(xa)$ стремится к нулю при $x \to 0$. В новой области интегрирования коэффициент $\exp(-\tau\Delta_1)$ приблизительно постоянен, если $Q/z \ll \alpha$. При этих условиях (3-164) можно переписать в виде

$$Э^{п(1)} = (4/a)\left[2\alpha\nu_{1,0}(a^2+z^2)^{1,5}\right]^{0,5}\exp(-\alpha\Delta_1) \times$$
$$\times \int\limits_{k_0}^{Q/z} \frac{x^2 c}{\tau_0} J_1(xa)\exp[-\tau_0(z-\Delta_1)]\,dx. \qquad (3\text{-}165)$$

Формулы (3-164) и (3-165) запрограммированы, и получены численные результаты (табл. 3-1) для следующих числовых величин: $\gamma_1 = 2 \cdot 10^7$ Ом $\cdot$ м$^{-1}$; $\nu_{1,0} = 1$; $\Delta_1 = 0,00159$ м; $a = 0,035$ м.

Таблица 3-1

Частота электромагнитного поля, кГц	Эффективность экранирования, вычисленная по формулам		
	(3-164)	(3-165)	(3-166)
0,1	1,04	1,074	1,079
0,2	1,178	1,213	1,215
0,4	1,542	1.570	1,614
0,7	2,213	2,228	2,404
1	2,979	2,979	3,273
2	5,821	5,821	6,310
4	11,18	11,18	11,72
7	32,24	32,24	32,61

Надежные результаты для эффективности экранирования плоской оболочкой конечной толщины можно получить, используя теорию длинной линии:

$$Э^{п(1)} = p[1 - q\exp(-2\alpha\Lambda_1)]^{-1}\exp(-\alpha\Delta_1), \qquad (3\text{-}166)$$

где $p = 4k^2/(1+k)^2$ — коэффициент первичного отражения; $q = (1-k)^2/(1+k)^2$ — коэффициент переотражений; $\alpha = (1+i)/\delta$ — комплексный коэффициент прохождения; $k = Z_w/\eta$; $\eta = (1+i)\delta$ — внутреннее полное сопротивление материала; $\delta = [2/(\omega\mu_1\gamma_1)]^{0,5}$ — глубина поверхностного слоя; Z_w — полное волновое сопротивление.

Используя обозначения рис. 3-3, полное волновое сопротивление Z_w можно записать в виде:

$Z_w \approx i\omega\mu_0 z/3$ — для диполя;
$Z_w \approx i\omega\mu_0(a^2+z^2)/(3z)$ — для петли с током.

В формуле (3-166) член p определяет первичное отражение от обеих поверхностей, член $1 - q\exp(-2\alpha\Delta_1)$ — все последующие отражения и переотражения; член $\exp(-\alpha\Delta_1)$ — затухание при прохождении через экран. Если воспользоваться для расчета эффективности экранирования плоским экраном формулой (3-166), можно получить результаты, представленные в табл. 3-1. При расчетах использованы те же исходные данные, что и в расчетах по формулам (3-164) и (3-165).

Эффективность экранирования по гармоникам. Используя метод, изложенный в § 3-1, для экранирующих функций плоской пластины при $F_{nm}(q_1) = \exp(az)$; $P_{nm}(q_1) = \exp(-az)$; $Y_{nm}(q_2, q_3) = \exp(-i\lambda x + i\beta y)$; $\Lambda_1(\lambda, \beta) = 2a$; $G^{п}_{nm} = -a^2$; $a = (\lambda^2+\beta^2)^{0,5}$; $n = \lambda\ (-\infty < \lambda < \infty)$; $m = \beta\ (-\infty < \beta < \infty)$; $q_1 = z$; $q_2 = x$; $q_3 = y$ получим

$$Э^{п(1)}_{\lambda,\beta} = [a(p+q)]^{-1}\left[(q-p)a + pqa^2 - 1\right]; \qquad (3\text{-}167а)$$

$$W^{п(1)}_{\lambda,\beta(i)} = -\frac{(1+pqa^2)\exp(-2az_1)}{(q-p)a + pqa^2 - 1}, \quad z < z_1, \qquad (3\text{-}167б)$$

где $p = \mu_1\Delta_1/(2\mu_0)$; $q = 2/(i\omega\mu_0\gamma_1\Delta_1)$; $z = z_1$ — координата поверхности.

Формулы (3-167) получены при использовании в качестве помехонесущего поля низкочастотного магнитного диполя $D[\mathbf{M}_1, \mathbf{r}_1]$ — рис. 2-26, где $z_2, \ldots, z_\nu \to \infty$.

При расчете экранирующих функций по гармоникам от систем проводов, параллельных плоской пластине (рис. 3-8), можно использовать выражения

$$Э^{п(1)}_{\lambda} = \exp(-\Delta_1\lambda)\left\{\operatorname{ch}(k_\lambda\Delta_1) + 0{,}5\left(K_\lambda + K_\lambda^{-1}\right)\operatorname{sh}(k_\lambda\Delta_1)\right\}; \qquad (3\text{-}168а)$$

$$W^{п(1)}_{\lambda(i)} = 0{,}5\left(K_\lambda - K_\lambda^{-1}\right)\operatorname{sh}k_\lambda\Delta_1\left(Э^{п(1)}_{\lambda}\right)^{-1}, \qquad (3\text{-}168б)$$

где $k_\lambda = (k^2+\lambda^2)^{0,5}$; $k^2 = i\omega\mu_1\gamma_1$; $K_\lambda = k_\lambda/(\Delta_1\nu_{1,0})$; Δ_1 — толщина пластины; λ — параметр ($\lambda \in [0;\ \infty]$).

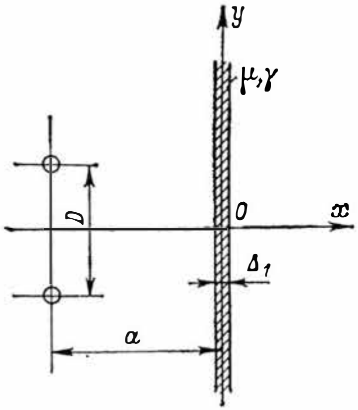


Рис. 3-8. Плоская пластина в поле линейных проводов с током

Экранирующие функции (3-168) по форме совпадают с одноименными функциями, выведенными в работе [10] при анализе поля пары проводов с токами в экране кольцевой формы сечения. Отличие заключается лишь в том, что здесь параметр непрерывно меняется от 0 до ∞.

Для упрощения анализа можно в формулах (3-168) воспользоваться первыми членами разложения в ряды $\operatorname{ch}(k_\lambda \Delta_1)$, $\operatorname{sh}(k_\lambda \Delta_1)$ по степеням $k_\lambda \Delta_1$:

$$Э_\lambda^{п(1)} = \left(p_1 q_1 \lambda^2 + \lambda q_1 + 1\right)/(q_1 \lambda); \qquad (3\text{-}169а)$$

$$W_\lambda^{п(1)} = \left(1 - p_1 q_1 \lambda^2\right)/\left(p_1 q_1 \lambda^2 + \lambda q_1 + 1\right), \qquad (3\text{-}169б)$$

где $p_1 = \mu_1 \Delta_1/(2\mu_0)$; $q_1 = 2/(i\omega\mu_0\gamma_1 \Delta_1)$.

Для двухслойных плоских оболочек могут быть получены выражения

$$Э_{\lambda,\beta}^{п(2)} = \left\{\left[p_1 q_1 a^2 + (q_1 - p_1) a - 1\right]\left[p_2 q_2 a^2 + (q_2 - p_2) a - 1\right] - \right.$$
$$\left. - \exp(-2a\Delta_{2,1})\left(a^2 + p_1 q_1\right)\left(a^2 + p_2 q_2\right)\right\}/\left[a^2 (p_1 + q_1)(p_2 + q_2)\right],$$
$$\Delta_{2,1} = z_2 - z_1; \qquad (3\text{-}170а)$$

$$W_{\lambda,\beta}^{п(2)} = 0{,}5\left\{\left(a^2 + p_1 q_1\right)\left[p_2 q_2 a^2 + (q_2 - p_2) a - 1\right] - \right.$$
$$- \exp(2a\Delta_{2,1})(a^2 + p_2 q_2)\left.[p_1 q_1 a^2 + (q_1 - p_1) a - 1]\right\}/\{[p_1 q_1 a^2 +$$
$$+ (q_1 - p_1) a - 1][p_2 q_2 a^2 + (q_2 - p_2) a - 1] - \exp(-2a\Delta_{2,1}) \times$$
$$\times (a^2 + p_1 q_1)(a^2 + p_2 q_2)\}. \qquad (3\text{-}170б)$$

Оболочки с концентрическим металлическим включением. *Сферическая оболочка.*

1. Оболочка со сплошным включением. Проводящая ферромагнитная оболочка находится в неоднородном пульсирующем электромагнитном поле (рис. 2-27), имеет конечную толщину и область с концентрическим металлическим включением. Тогда эффективность экранирования оболочкой по гармоникам [10]

$$Э_{n(в)}^{с(1)} = Э_n^{с(1)}\left[1 + \frac{n(\nu_{в,0} - 1)}{n\nu_{в,0} + (n+1)} W_{n(в)}^{с(1)} \rho_{в,0}^{2n+1}\right], \qquad (3\text{-}171)$$

где $\nu_{в,0} = \mu_в/\mu_0$; $\rho_{в,0} = R_в/R_0$; $W_{n(в)}^{с(1)}$ — функция обратного действия оболочки с металлическим включением; $Э_n^{с(1)}$ — эффективность экранирования сферической оболочкой при отсутствии тела. Обозначение параметров аналогично использованным в

§ 3-2. Функция обратного действия оболочки с металлическим включением определяется в зависимости от типа граничных условий, используемых на теле. Эффективность экранирования сферической оболочкой без тела $Э_n^{c(1)}$ может быть определена по формуле (3-127а).

При $\mu_в \gg \mu_0$

$$Э_{n(в)}^{c(1)} = Э_n^{c(1)}\left[1 + W_{n(в)}^{c(1)} p_{в,0}^{2n+1}\right]. \tag{3-172}$$

Если экран ферромагнитный, то на низких частотах режим работы его приближается к магнитостатическому. В этом режиме в условиях сильного экранирования $(\mu_1 \gg \mu_0)$ $W_{n(в)}^{c(1)} \to -1$, сумма членов в скобках оказывается меньше единицы. Значит, эффективность экранирования ферромагнитным экраном с металлическим телом становится меньше эффективности экранирования оболочкой без тела. Таким образом, экранирующее действие оболочки уменьшается. Следует отметить, что сумма членов в скобках зависит от отношения радиусов $p_{в,0}$. Это позволяет в известных пределах изменять влияние металлического тела на эффективность экранирования оболочкой, выбирая оптимальным расстояние между телом и оболочкой, так чтобы изменение эффективности экранирования не было слишком большим.

Для экранов из неферромагнитных материалов, работающих в режиме электромагнитного экранирования, $W_{n(в)}^{c(1)} \to (n + 1)/n > 1$. При этом сумма членов в квадратных скобках формулы (3-172) увеличивается, становится бо́льшей единицы, что приводит к улучшению экранирующих свойств оболочки.

Если экранирующая оболочка достаточно тонкая, то можно использовать метод расчета, представленный в § 3-1, а из формул (3-28) — (3-30) — получить экранирующие функции сферической оболочки (рис. 2-27):

$$Э_{n(в)}^{c(1)} = \left\{\frac{(2n+1)\, t_1^+}{R_1 D_n}\left[\alpha_0 R_в - n + (\alpha_0 R_в + n + 1)\frac{n b_{nm} R_в^{2n+1}}{(n+1)\, a_{nm}}\right]\right\}^{-1}; \tag{3-173а}$$

$$\begin{aligned} W_{n(S_1)}^{c(1)} = \frac{1}{D_n}&\left[\alpha_0 R_в - n + (\alpha_0 R_в + n + 1)\frac{n b_{nm}}{(n+1)\, a_{nm}} R_в^{2n+1}\right] \times \\ &\times\left[n(n+1)\, p_1 q_1 R_1^{-2} - (2n+1)\, t_1^- R_1^{-1} - 1 - \left(\frac{n+1}{n}\right) \times \right. \\ &\left. \times\left(1 + n^2\frac{p_1 q_1}{R_1^2}\right)\left(\frac{r}{R_1}\right)^{2n+1}\right], \quad r_1 < r < R_1; \end{aligned} \tag{3-173б}$$

$$\begin{aligned} W_n^{c(1)}(S_0) = \frac{1}{D_n}&\left[\alpha_0 R_в - n + (\alpha_0 R_в + n + 1)\left(\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{R_в}{r}\right)^{2n+1}\right] \times \\ &\times\left[n(n+1)\, p_1 q_1 R_1^{-2} - (2n+1)\frac{t_1^-}{R_1} - 1 - \left(1 + n^2\frac{p_1 q_1}{R_1^2}\right) \times \right. \\ &\left. \times\frac{(n+1)\, a_{nm}}{n b_{nm} R_1^{2n+1}}\right], \quad R_в < r < r_1, \end{aligned} \tag{3-173в}$$

где $D_n = (\alpha_0 R_в + n + 1)(1 + n^2 p_1 q_1 R_1^{-2}) p_{в,1}^{2n+1} + (\alpha_0 R_в - n) \times$
$\times [n(n+1) p_1 q_1 R_1^{-2} - (2n+1) t_1^- R_1^{-1} - 1]$;

$b_{mn}/a_{nm} = [b_1 P_{n+1}^{-m+1}(\nu) \exp(i\varphi_0) + 0{,}5 b_{-1}(n+m+1)(n+m+2) \times$
$\times P_{n+1}^{-m-1}(\nu) \exp(-i\varphi_0) + b_0 (n+m+1) P_{n+1}^{-m}(\nu)] \{[b_1 P_{n-1}^{-m+1}(\nu) \times$
$\times \exp(i\varphi_0) + 0{,}5 b_{-1}(n-m)(n-m-1) P_{n-1}^{-m-1}(\nu) \exp(-i\varphi_0) -$
$- b_0 (n-m) P_{n-1}^{-m}(\nu)] R_в^{2n+1}\}^{-1}$; $\mathbf{M}_\beta$ $(\beta = x,\ y,\ z)$ — составляющие момента диполя; $p_{в,1} = \mu_в/\mu_1$; $\nu = \cos\theta_0$; $(r_1,\ \theta_0,\ \varphi_0)$ — координаты размещения диполя.

2. Оболочка с полым включением. В этом случае при расчете может быть использована методика, развитая в § 3-1. Если для обеих оболочек используются условия (1-37), то эффективность экранирования

$$Э_{n\,(в)}^{с\,(1)} = \frac{p_{в,1}^{2n+1} K_n^{(1)} K_n^{(в)} - l_n^{(1)} l_n^{(в)}}{(2n+1)(a_1 + c_1)\{l_n^{(в)} - p_{в,1}^{2n+1}[n/(n+1)] K_n^{(в)}\}}, \qquad (3\text{-}174)$$

где

$$l_n^{(j)} = n(n+1) d_j + (2n+1)(c_j - a_j) - 1;$$
$$K_n^{(j)} = 1 + d_j (n+1)^2; \quad a_j = p_j/2R_j; \qquad (3\text{-}175)$$
$$c_j = q_j/(2R_j); \quad d_j = p_j q_j R_j^{-2}, \quad j = 1;\ в;$$
$$p_j = \mu_j \Delta_j/(2\mu_0); \quad q_j = 2/(i\omega\mu_0\gamma_1\Delta_1).$$

При $R_в \to 0$ (область металлического включения исчезает)

$$Э_n^{с\,(1)} = 2 l_n^{(1)}/[(2n+1)(a_1 + c_1)], \qquad (3\text{-}176)$$

что соответствует формуле (3-130а).

Круговая цилиндрическая оболочка.

1. Оболочка со сплошным включением. Используя метод расчета, представленный в § 3-1, и формулы (3-28)—(3-30), можно получить экранирующие функции по гармоникам круговой цилиндрической оболочки (рис. 2-28):

$$Э_{\lambda,\,m\,(в)}^{ц\,(1)} = \{[\alpha_0 R_в \nu_в I_m'(\nu_в) + (m^2 + \nu_в^2) I_m(\nu_в)] \times$$
$$\times [b_m(\lambda)/a_m(\lambda)] - [\alpha_0 R_в \nu_в K_m'(\nu_в) + (m^2 + \nu_в^2) K_m(\nu_в)]\}^{-1} \{B_1^{21} \times$$
$$\times [\alpha_0 R_в \nu_в I_m'(\nu_в) + (m^2 + \nu_в^2) I_m(\nu_в)] - B_1^{22} [\alpha_0 R_в \nu_в K_m'(\nu_в) +$$
$$+ (m^2 + \nu_в^2) K_m(\nu_в)]\}, \qquad (3\text{-}177)$$

где

$$B_1^{21} = \{R_1/[t_1^+(m^2 + \nu_1^2)]\}[\nu_1^2 (K_m'(\nu_1))^2 + p_1 q_1 R_1^{-2} (m^2 + \nu_1^2)^2 K_m^2(\nu_1)];$$
$$B_1^{22} = \{R_1/[t_1^+(m^2 + \nu_1^2)]\}[\nu_1^2 K_m'(\nu_1) I_m'(\nu_1) - t_1^- R_1^{-1}(m^2 + \nu_1^2) +$$
$$+ p_1 q_1 R_1^{-2} (m^2 + \nu_1^2)^2 K_m(\nu_1) I_m(\nu_1)]; \quad \nu_j = |\lambda| R_j, \quad j = в;\ 1;$$

$$a_m(\lambda) = (-1)^m (\lambda/\pi) [b_1 I_{m-1}(\lambda l_0) \exp[-i(m-1)\varphi_0] - 0{,}5b_{-1} \times$$
$$\times I_{m+1}(\lambda l_0) \exp[-i(m+1)\varphi_0] - ib_0 I_m(\lambda l_0) \exp(-im\varphi_0)] \exp(ih\lambda);$$
$$b_m(\lambda) = (-1)^{m+1}(\lambda/\pi) [b_1 \tilde{K}_{m-1}(\lambda l_0) \exp[-i(m-1)\varphi_0] - 0{,}5b_{-1} \tilde{K}_{m+1}(\lambda l_0) \times$$
$$\times \exp[-i(m+1)\varphi_0] + ib_0 \tilde{K}_m(\lambda l_0) \exp(-im\varphi_0)] \exp(ihz);$$ $\{l_0, h, \varphi_0\}$ — цилиндрические координаты размещения диполя; $\alpha_0 = (1+i) \times \times [\omega\mu_0^2 \gamma_в/(2\mu_в)]^{0,5}$; $\quad K_j(\lambda l_0) = (\operatorname{sgn} \lambda l_0)^n K_m(|\lambda| l_0)$.

2. Оболочка с полым включением. При расчете используется методика, развитая в § 3-1. Если для обеих оболочек используются условия (1-37), то эффективность экранирования по гармоникам

$$Э^{ц\,(1)}_{\lambda, m\,(в)} = \frac{l_1 l_в - L_1 d_в}{L_в [K_m(\nu_1)/I_m(\nu_1)] - l_в R_1^{-1}(p_1 + q_1)}, \tag{3-178}$$

где

$$l_j = 2n^3 p_j q_j R_j^{-2} I_m(\nu_j) K_m(\nu_j) + (p_j - q_j) R_j^{-1} + 2I'_m(\nu_j) K'_m(\nu_j) n^{-1} R_j^{-2};$$
$$L_j = 2n [p_j q_j I_m^2(\nu_j) n^2 R_j^{-2} + (I'_m(\nu_j))^2 n^{-2} R_j^2], \quad j = 1;\ в;\ \nu_j = |\lambda| R_j;$$
$$d_j = 2n [p_j q_j K_m^2(\nu_j) n^2 R_j^{-2} + (K'_m(\nu_j))^2 n^{-2} R_j^2].$$

При $R_в \to 0$ формула (3-178) преобразуется в (3-163а) для эффективности экранирования по гармоникам однослойной оболочкой.

Плоская оболочка. Используя метод расчета, представленный в § 3-1, из формул (3-28)—(3-30) можно получить экранирующие функции по гармоникам плоской оболочки (рис. 3-9):

$$Э^{п\,(1)}_{\lambda, \beta\,(в)} = \{(1 + p_1 q_1 a^2) \exp[-2a(\xi_1 - \xi_0)] + [p_1 q_1 a^2 + (q_1 - p_1) a - 1][(\alpha_0 - a)/(\alpha_0 + a)]\}/a(p_1 + q_1)\{[(\alpha_0 - a)/(\alpha_0 + a)] + [b(\lambda, \beta)/a(\lambda, \beta)] \exp(2a\xi_0)\}, \tag{3-179}$$

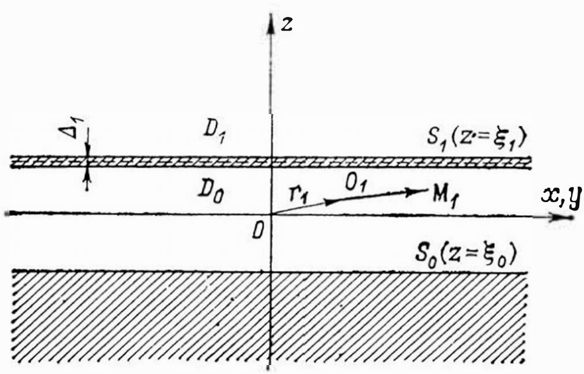


Рис. 3-9. Плоская пластина в дипольном магнитном поле в присутствии ферромагнитного полупространства

где $b(\lambda, \beta)/a(\lambda, \beta) = \{(\lambda + i\beta) a^{-1} b_1 - 0{,}5ab_{-1}(\lambda + i\beta)^{-1} + ib_0\} \times$ $\times \exp(-2az_0)/\{(\lambda + i\beta) a^{-1} b_1 - 0{,}5ab_{-1}(\lambda + i\beta)^{-1} - ib_0\}$; $b_1 = -[1/(8\pi)](\mathbf{M}_x - i\mathbf{M}_y)$; $b_{-1} = [1/(4\pi)](\mathbf{M}_x + i\mathbf{M}_y)$; $b_0 = \mathbf{M}_z/(4\pi)$; $\mathbf{M}_1(\mathbf{M}_x, \mathbf{M}_y, \mathbf{M}_z)$ — момент диполя $D[\mathbf{M}_1, \mathbf{r}_1]$; $\mathbf{r}_1(x_0, y_0, z_0)$ — координаты размещения диполя.

Примеры расчета оболочек при резко выраженном поверхностном эффекте.

Используя общий метод расчета, представленный в § 3-1, из формул (3-33) можно получить функции обратного действия наиболее употребительных оболочек при резко выраженном поверхностном эффекте:

для сферической оболочки

$$W^{c(1)}_{n(i)} = -\frac{(n+1)(n+\alpha R_1)(r/R_1)^{2n+1}}{n(1+n-\alpha R_1)}, \qquad (3\text{-}180)$$

где $r < R_1$; $\alpha = (1+i)\left[\omega\mu_0^2\gamma_1/(2\mu_1)\right]^{0,5}$;

для круговой цилиндрической оболочки

$$W^{ц(1)}_{\lambda, m(i)} = -\frac{\left[\left(m^2+\nu_1^2\right) K_m(\nu_1) - \alpha\rho_1\nu_1 K'_m(\nu_1)\right] I_m(|\lambda|\rho)}{\left[\left(m^2+\nu_1^2\right) I_m(\nu_1) - \alpha\rho_1\nu_1 I'_m(\nu_1)\right] K_m(|\lambda|\rho)},$$

$$\nu_1 = |\lambda|\rho_1, \quad \rho < \rho_1. \qquad (3\text{-}181)$$

для плоской оболочки

$$W^{п(1)}_{\lambda, \beta(i)} = 1 - \frac{a+\alpha}{a-\alpha}\exp[-2a(z_1 - z)], \qquad (3\text{-}182)$$

где $a = (\lambda^2 + \beta^2)^{0,5}$; $z < z_1$.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ
ОБОЛОЧКИ СЛОЖНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФОРМ

4-1. ОДНОСЛОЙНЫЕ ОБОЛОЧКИ В ОДНОРОДНЫХ ПОСТОЯННЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

Эллипсоиды трехосные. Поверхность, описываемая уравнением $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) = 1$, называется эллипсоидом, где a, b, c — полуоси. Если все три величины a, b, c различны, то эллипсоид называется трехосным. Эллипсоидальный экран представляет собой оболочку, ограниченную двумя эллиптическими поверхностями (рис. 4-1) с полуосями: a, b, c — внешние; a_1, b_1, c_1 — внутренние. При этом возможны два случая:

два эллипсоида (внешний и внутренний) конфокальны (толщина стенок уменьшается к полюсам); условие конфокальности эллипсоидов означает, что $a^2 - a_1^2 = b^2 - b_1^2 = c^2 - c_1^2 = d^2$, где d^2 — параметр, определяющий их взаимное положение;

два эллипсоида неконфокальны, но выбраны так, что толщина стенки оболочки постоянна.

В дальнейшем рассматриваем оболочку с конфокальными эллипсоидальными поверхностями на базе работы [9]. Магнитная проницаемость оболочки соответствует μ_1 и среды вне и внутри оболочки — μ_0. Внешнее помехонесущее поле напряженностью $\mathbf{H}^{(0)}$ предполагается однородным и в общем случае направленным произвольно относительно осей эллипсоидов, совмещенных с декартовой системой координат (x, y, z) — рис. 4-1. В системе ортогональных координат (λ, μ, ν) произвольная точка пространства является точкой пересечения конфокальных трехосных эллипсоидов $(\lambda = \lambda_k)$, однополостных $(\mu = \mu_k)$ и двухполостных $(\nu = \nu_k)$ гиперболоидов, где λ_k, μ_k, ν_k — фиксированные значения. При этом $\lambda = 0$ соответствует внешней поверхности экрана, а $\lambda = \lambda_1 = -d^2$ — внутренней. Расчет внутреннего магнитного поля напряженностью $\mathbf{H}^{(i)}$ сводится при отмеченных условиях к решению уравнения Лапласа в эллипсоидальных координатах относительно скалярного магнитного потенциала v в трех областях.

Поле напряженностью $\mathbf{H}^{(i)}$ так же, как и исходное поле напряженностью $\mathbf{H}^{(0)}$, однородно. Сравнивая между собой отдельные составляющие напряженности полей $\mathbf{H}^{(i)}$ и $\mathbf{H}^{(0)}$ по осям x, y, z (или их потенциалы), определим эффективность экранирования параллельно этим осям:

$$Э_q^{\text{эл}(1)} = \mathbf{H}_q^{(0)}/\mathbf{H}_q^{(i)}, \quad q = a,\ b,\ c. \tag{4-1}$$

После решения уравнения Лапласа (1-16) с граничными условиями (1-20) — (1-21) получим

$$Э_q^{\text{эл}(1)} = 1 + N_q[(1 - N_q)(V_{\text{эк}}/V) + (N_q - N_{q_1})](\nu_{1,0} + \nu_{0,1} - 2) + (N_q - N_{q_1})(1 - \nu_{1,0}), \tag{4-2}$$

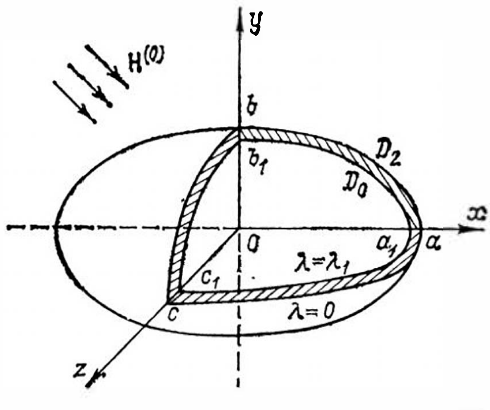


Рис. 4-1. Трехосный эллипсоид

где

$$N_a = abc/[(a^2-b^2)(a^2-b^2)^{0,5}]\,[\mathbf{F}(\varphi,\ k)-\mathbf{E}(\varphi,\ k)];$$

$$N_b = abc\left[\frac{(a^2-b^2)^{0,5}}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}\mathbf{E}(\varphi,\ k)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)^{0,5}}\mathbf{F}(\varphi,\ k)-\frac{c}{ab(a^2-c^2)}\right]; \qquad (4\text{-}3)$$

$$N_c = abc\left\{b\left[ac(b^2-a^2)\right]^{-1}-\left[(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{0,5}\right]^{-1}E(\varphi,\ k)\right\};$$

$N_q\ (q = a,\ b,\ c)$ — коэффициенты размагничивания по полуосям q; $\mathbf{F}(\varphi,\ k)$ и $\mathbf{E}(\varphi,\ k)$ — эллиптические интегралы первого и второго рода с модулем $k=[(a^2-b^2)/(a^2-c^2)]^{0,5}$ и аргументом $\varphi = \arcsin[1-(c^2/a^2)]^{0,5}$; $V=(4\pi/3)\,abc$ — объем внешнего эллипсоида; $V_{эк}=(4\pi/3)(abc-a_1b_1c_1)$ — объем экрана. Формула (4-2) применима для сферических, сфероидальных и бесконечно протяженных круговых цилиндрических экранов, которые можно рассматривать как частные случаи эллипсоидальных. Так, для сферы вследствие изотропии ее формы с учетом

$$N_a + N_b + N_c + 1 \qquad (4\text{-}4)$$

и коэффициентов размагничивания внутреннего эллипсоида N_a, N_{b_1}, N_{c_1}, определяемых из формул (4-3) заменой a, b, c на a_1, b_1, c_1, получим $N_q = N_{q_1} = 1/3$, и из выражения (4-2) получим формулу (2-25а). Для кругового цилиндра с осями $a\to\infty$, $b=c$ получим $N_a = N_{a_1} = 0$, $N_b = N_c = N_{b_1} = N_{c_1} = 1/2$, и из выражения (4-2) следует формула (2-83а) для эффективности экранирования круговым цилиндром в перпендикулярном оси цилиндра поле.

Для эллипсоидальных экранов, граничные поверхности которых образованы конфокальными эллипсоидами, коэффициенты размагничивания по одним и тем же осям для внешнего и внутреннего эллипсоидов в общем случае не равны друг другу. Однако для многих практически используемых экранов соотношения между размерами внешних и внутренних эллипсоидов таковы, что $|N_q - N_{q_1}| \ll (1-N_q)(V_{эк}/V)$. В этих случаях можно пренебречь разностью $N_q - N_{q_1}$ в формуле (4-2) для тонких экранов с конфокальными граничными эллипсоидами: $\Delta_a/a < \Delta_b/b < \Delta_c/c \ll 1$, где $\Delta_a = a - a_1$; $\Delta_b = b - b_1$; $\Delta_c = c - c_1$ — толщины стенок вдоль соответствующих осей. При соблюдении указанных условий получим из (4-2) еще более простую формулу для эффективности экранирования:

$$Э_q^{эл\,(1)} = 1 + N_q(1-N_q)(V_{эк}/V)(\nu_{1,0}+\nu_{0,1}-2). \qquad (4\text{-}5)$$

Формулу (4-5) можно использовать для расчета эффективности экранирования эллипсоидальными экранами с граничными поверхностями, образованными не конфокальными, а «подобными» эллипсоидами, у которых соблюдается соотношение

$\Delta_a/a = \Delta_b/b = \Delta_c/c$. У «подобных» эллипсоидов разность $N_q - N_{q_1}$ для всех q равна нулю при любых соотношениях между толщиной вдоль оси и размером полуоси. Приближение состоит в том, что у таких экранов внутреннее поле неоднородно. Формулы (4-2) и (4-5) приближенно применимы и для вычисления эффективности экранирования оболочками с одинаковой по всем осям толщиной стенок $\Delta_a = \Delta_b = \Delta_c = \Delta$, а также любых выпуклых оболочек, граничные поверхности которых при расчете N_q и N_{q_1} можно заменить эквивалентными, например вписанными эллипсоидами.

Формула (4-5) упрощается, когда $\mu_1 \gg \mu_0$. Для всех q, равных a, b, с, получим

$$Э_q^{эл\,(1)} \approx 1 + N_q(1 - N_q)(V_{эк}/V)\,\nu_{1,0}, \qquad (4\text{-}6)$$

а при условии $\nu_{1,0} \gg 1$

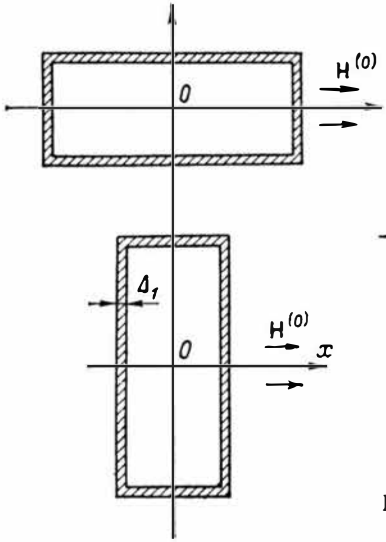
$$Э_q^{эл\,(1)} \approx N_q(1 - N_q)(V_{эк}/V)\,\nu_{1,0}. \qquad (4\text{-}7)$$

Из формул (4-6) и (4-7) следует, что эффективность экранирования параллельно осей эллипсоидов определяется соотношением магнитной проницаемости тела экрана и окружающих сред, соотношением объема оболочки и объема внешнего эллипсоида и произведением $N_q(1 - N_q)$, зависящим от формы эллипсоида.

Используя приведенные результаты, можно найти разные по форме эллипсоидальные экраны, у которых для одних и тех же $V_{эк}/V$ и $\nu_{1,0}$ эффективности экранирования максимальны по трем, двум и одной осям. Исследуя на условный максимум произведение $N_q(1 - N_q)$ при варьировании N_q для всех q, равных a, b, c, с учетом условия (4-4) находим, что оптимальным по форме для любого направления внешнего магнитного поля является сферический экран, у которого $N_q = 1/3$, $N_q(1 - N_q) \approx \approx 0{,}22$. Эффективности экранирования по двум осям максимальны для цилиндрического экрана с круговым сечением ($a \to \infty$, $b = c$). При этом $N_a = 0$; $N_b = N_c = 0{,}5$; $N_b(1 - N_b) = N_c(1 - N_c) = 0{,}25$. Для цилиндрического экрана с эллиптическим сечением ($a \to \infty$, $b > c$) имеем $N_b(1 - N_b) = N_c(1 - N_c)$. Из условия (4-4) при $N_a = 0$ получим $N_b = 1 - N_c$, однако поскольку $b \neq c$, то $N_q(1 - N_q) < 0{,}25$ ($q = b$, c).

Находим, что у цилиндрических экранов с эллиптическими и круговыми сечениями $N_a = 0$; $N_b = N_c$. Следовательно, перпендикулярное оси a внутреннее поле для таких экранов совпадает по направлению с перпендикулярным невозмущенным полем.

Для сфероидальных экранов можно найти форму, при которой значение эффективности экранирования по одной оси минимально. Такой формой обладает сжатый сфероид с $a = b > c$, если $N_c = 0{,}5$ ($c/a = c/b \approx 0{,}55$).



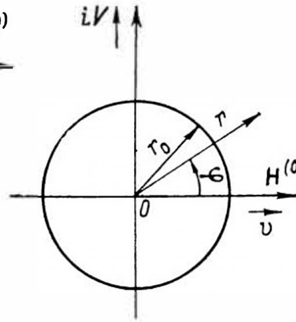


Рис. 4-2. Цилиндр с прямоугольным сечением

Для весьма тонких оболочек

$$\frac{V_{эк}}{V} \approx \frac{\Delta_a}{a} + \frac{\Delta_b}{b} + \frac{\Delta_c}{c}.$$

При этом условии для оболочек, образованных конфокальными эллипсоидами $d^2 \approx 2\Delta_a a = 2\Delta_b b = 2\Delta_c c$,

$$\frac{V_{эк}}{V} \approx \frac{d^2}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right); \tag{4-8}$$

для оболочек с «подобными» эллипсоидами

$$\frac{V_{эк}}{V} \approx \frac{3\Delta_a}{a} = \frac{3\Delta_b}{b} = \frac{3\Delta_c}{c}; \tag{4-9}$$

для оболочек с одинаковой толщиной стенок

$$\frac{V_{эк}}{V} \approx \Delta\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Приведенные в разделе формулы применимы для приближенного расчета эффективности экранирования однородного постоянного магнитного поля произвольными по форме выпуклыми оболочками любой толщины.

Цилиндрические оболочки.

Цилиндры с прямоугольным поперечным сечением (рис. 4-2). Такие цилиндры были исследованы теоретически А. Магером [44] и Г. Каденом [39] с помощью конформных преобразований. Эффективность экранирования цилиндром с прямоугольным сечением зависит от направления внешнего магнитного поля: параллельно поперечной или продольной стороне прямоугольника. Остаточное поле внутри прямоугольника является неоднородным. Оно определяется из граничных условий на внутренней поверхности. Эти граничные величины, в свою очередь, зависят от напряженности внешнего поля. Конформное преобразование позволяет решить эту граничную задачу для кругового поперечного сечения.

Функции отображения $z(w)$, используемые для преобразования внешней поверхности прямоугольника во внешнюю поверхность круга, имеют вид

$$z(w) = (A/r_0) \int_{r_0}^{w} \sqrt{(w^2 - w_0^2)(w^2 - w_0^{*2})} \frac{dw}{w^2} + b, \qquad (4\text{-}10)$$

где $w = \pm w_0 = \pm r_0 \exp(i\varphi_0)$; $w = \pm w_0^* = \pm r_0 \exp(-i\varphi_0)$ — для четырех корней прямоугольника (табл. 4-1).

Таблица 4-1

w	r_0	w_0	w_0^*	ir_0
$z(w)$	b	$ia+b$	$-ia+b$	ia

Параметры A, r_0, φ в (4-10) пока неизвестны. Для их определения используются три условия:

$$z(w_0) - z(r_0) = ia; \qquad (4\text{-}11а)$$

$$z(w_0) - z(ir_0) = b; \qquad (4\text{-}11б)$$

$$\lim_{w \to \infty} (dz/dw) = 1. \qquad (4\text{-}11в)$$

Из условий (4-11) можно получить

$$A = r_0; \qquad (4\text{-}12а)$$

$$a = 2r_0 \int_0^{\varphi_0} \sqrt{\sin^2\varphi_0 - \sin^2\varphi}\, d\varphi; \quad a = 2r_0 \mathbf{J}_a = 2r_0(\mathbf{E} - k'^2\mathbf{K}); \qquad (4\text{-}12б)$$

$$b = 2r_0 \int_{\varphi_0}^{\pi/2} \sqrt{\sin^2\varphi - \sin^2\varphi_0}\, d\varphi; \quad b = 2r_0 \mathbf{J}_b = 2r_0(\mathbf{E}' - k^2\mathbf{K}'), \qquad (4\text{-}12в)$$

где $\mathbf{E}$, $\mathbf{K}$ и $\mathbf{E}'$, $\mathbf{K}'$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода с аргументами $k = \sin\varphi_0$ и $k' = \cos\varphi_0$.

Взяв отношение a/b, получим формулу для определения модуля k:

$$a/b = \frac{\mathbf{J}_a}{\mathbf{J}_b} = \frac{\mathbf{E} - k'^2\mathbf{K}}{\mathbf{E}' - k^2\mathbf{K}'}. \qquad (4\text{-}13)$$

Результаты расчета модуля k представлены на рис. 4-3, *а*.

Из (4-12б) — (4-12в) можно определить

$$r_0 = a/(2\mathbf{J}_a) = b/(2\mathbf{J}_b) = 0{,}5\,[ab/(\mathbf{J}_a\mathbf{J}_b)]^{0{,}5}. \qquad (4\text{-}14)$$

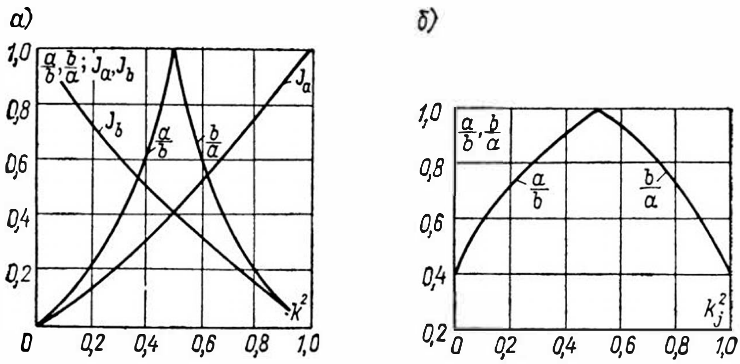


Рис. 4-3. Графики модулей эллиптических интегралов

Функции отображения $z(w)$, используемые для преобразования внутреннего пространства прямоугольника во внутреннее пространство круга, отличаются от рассчитанных по формуле (4-10):

$$z(w) = Br_0 \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(w^2 - w_0^2)(w^2 - w_0^{*2})}}. \qquad (4\text{-}15)$$

Поскольку стенки цилиндра с прямоугольным сечением относительно тонкие ($\Delta \ll a,\ b$), необходимо сделать разделение между границами внешней и внутренней поверхностей. Отсюда нули полинома $w = \pm w_j = \pm r_0 \exp(-i\varphi_j)$; $w = \pm w_j^* = \pm r_0 \times \exp(i\varphi_j)$. Неизвестными в (4-15) являются B и φ_j. Для их нахождения используются условия:

$$z(w_j) - z(r_j) = ia = 0{,}5iB \int_0^{\varphi_j} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\varphi_j - \sin^2\varphi}} = 0{,}5iB\mathrm{K}(\sin\varphi_j) = 0{,}5iB\mathrm{K}(k_j) = 0{,}5iB\mathrm{K}_j; \qquad (4\text{-}16а)$$

$$z(w_j) - z(ir_j) = b = 0{,}5B \int_{\varphi_j}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\varphi - \sin^2\varphi_j}} = 0{,}5B\mathrm{K}(\cos\varphi_j) = 0{,}5B\mathrm{K}(k_j') = 0{,}5B\mathrm{K}_j', \qquad (4\text{-}16б)$$

где $k_j' = |\cos\varphi_j|$; $k_j = |\sin\varphi_j|$ — модули эллиптических интегралов. Взяв отношение a/b, получим формулу для определения модуля k_j:

$$a/b = \mathrm{K}_j/\mathrm{K}_j'. \qquad (4\text{-}17)$$

Результаты расчета модуля k_j представлены на рис. 4-3, *б*. Из формул (4-16) определяется

$$B = 2a/\mathrm{K}_j = 2b/\mathrm{K}_j' = 2\left[ab/(\mathrm{K}_j\mathrm{K}_j')\right]^{0,5}. \qquad (4\text{-}18)$$

Учитывая, что

$$K_j = 4\exp\left(-\frac{\pi}{2}\frac{a}{b}\right), \quad a \leqslant b/2;$$

$$K'_j = 4\exp\left(-\frac{\pi}{2}\frac{a}{b}\right), \quad b \leqslant a/2,$$

получим $B = 1{,}268a = 0{,}634b$.

При $\mu_1 \gg \mu_0$ магнитные силовые линии направлены по нормали к внешним сторонам прямоугольника, а также и к поверхности круга.

Использование комплексного потенциала $z(w)$ в виде (4-15) для перевода магнитного поля w-плоскости в физическую z-плоскость прямоугольника позволяет получить

$$z = X(r, \varphi) + iY(r, \varphi) = \mathbf{H}^{(0)}\left(w - r_0^2/w\right), \quad r \geqslant r_0. \tag{4-19}$$

Можно доказать, что касательной составляющей напряженности поля на поверхности $r = r_0$ можно пренебречь:

$$\left(\frac{\partial X}{r\partial\varphi}\right)_{r=r_0} = 0. \tag{4-20}$$

Магнитный поток, протекающий в стенке, пропорционален функции потока $Y(r_0, \varphi)$:

$$\Phi(\varphi) = -\mu_0 Y(r_0, \varphi) = -2\mu_0\mathbf{H}^{(0)}r_0\sin\varphi. \tag{4-21}$$

Напряженность магнитного поля в стенке направлена параллельно поверхности:

$$\mathbf{H}(\varphi) = \Phi(\varphi)/\mu\Delta_1 = -\mathbf{H}^{(i)}\sin\varphi, \tag{4-22}$$

где $\mathbf{H}^{(i)} = [2\mu_0 r_0/(\mu\Delta_1)]\,\mathbf{H}^{(0)}$.

Граничная величина потенциала поля на внутренней поверхности, с использованием (4-22) и интегрированием по $\mathbf{H}(\varphi)$,

$$X_j(r_0, \varphi) = \int\limits_{\pi/2}^{\varphi}\mathbf{H}(\varphi)\,ds(\varphi) = -2r_0\mathbf{H}^{(i)}\int\limits_{\pi/2}^{\varphi}\sqrt{|\cos^2\varphi_0 - \cos^2\varphi|}\,\sin\varphi\,d\varphi. \tag{4-23}$$

Интеграл в этой формуле можно оценить введением переменной $\tau = \cos\varphi$, откуда

$$X_j(r_0, \varphi) = r_0\mathbf{H}^{(0)}\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\cos^2\varphi_0 + \cos\varphi\sqrt{\cos^2\varphi - \cos^2\varphi_0} - \\ -\cos^2\varphi_0\,\mathrm{arcch}\dfrac{\cos\varphi}{\cos\varphi_0}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0; \\ \cos\varphi\sqrt{\cos^2\varphi_0 - \cos^2\varphi} + \\ +\cos^2\varphi\,\mathrm{arcch}\dfrac{\cos\varphi}{\cos\varphi_0}, \quad \varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2.\end{cases} \tag{4-24}$$

Продолжая эту функцию аналитически на угол $\pi/2$, получим кривые (рис. 4-4), которые близки к косинусным линиям.

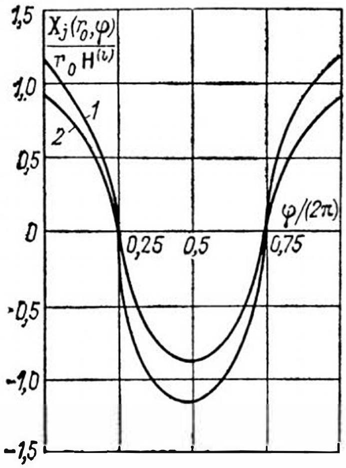


Рис. 4-4. Зависимость скалярного потенциала $\dfrac{X_j(r_0,\ \varphi)}{r_0 H^{(i)}}$ от угла φ при $a/b = 0{,}5$ (кривая *1*) и $a/b = 2$ (кривая *2*)

Комплексный потенциал, который соответствует рассчитанному по формуле (4-24) при граничных условиях $r = r_0$, будет

$$z_j(w) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w^n}{r_0^n}\int_0^{2\pi} X_j(r_0,\ \varphi)\, e^{-in\varphi}\, d\varphi. \tag{4-25}$$

Интеграл в этой формуле указывает на n-й коэффициент в ряду Фурье для $X_j(r_0,\ \varphi)$. Коэффициенты для $n = 2, 3, 4, \ldots$ рассчитать затруднительно. Если, однако, ограничиться напряженностью магнитного поля $\mathbf{H}(0)$ в центре прямоугольника, то остается лишь первый член с $n = 1$. Тогда $\pi/2$

$$\mathbf{H}(0) = \left(\frac{dz_j}{dw}\,\frac{dw}{dz}\right)_{w=0} = \frac{4}{\pi B}\int_0^{\pi/2} X_j(r_0,\ \varphi)\cos\varphi\, d\varphi. \tag{4-26}$$

Подстановка (4-24) в этот интеграл и проведение необходимых преобразований приводят к выражению

$$\mathbf{H}(0) = \frac{4r_0\mathbf{H}^{(i)}}{\pi B}\left\{\left[\frac{1}{3}(1+k^2)+k'^2\right](\mathbf{E}+\mathbf{E}') - \frac{4}{3}k'^2\mathbf{K} - \frac{2}{3}k^2\mathbf{K}'\right\}. \tag{4-27}$$

Подставляя в это выражение значение r_0 из формулы (4-14), B — из (4-18), $F = 4ab$ и $\mathbf{H}^{(i)} = 2\,[\mu_0 r_0/(\mu_1\Delta_1)]\,\mathbf{H}^{(0)}$, получим

$$\mathbf{H}(0) = \frac{\sqrt{k_j k_j'}}{3\pi \mathbf{J}_a \mathbf{J}_b}\left[(1+k'^2)(\mathbf{E}+\mathbf{E}') - 2k'^2\mathbf{K} - k^2K'\right]\left[F^{1/2}/\nu_{1,0}\Delta_1)\right]\mathbf{H}^{(0)}. \tag{4-28}$$

Эффективность экранирования цилиндром с прямоугольным поперечным сечением в центре (точка O) рассчитывается по формуле

$$Э^{\text{п. ц}\,(1)}(0) = \frac{3\pi \mathbf{J}_a \mathbf{J}_b \Delta_1 \nu_{1,0}}{\sqrt{k_j k_j'}\,\left[(1+k'^2)(\mathbf{E}+\mathbf{E}') - 2k'^2\mathbf{K} - k^2\mathbf{K}'\right]\sqrt{F}}. \tag{4-29}$$

Для квадратного сечения $(a = b)\ k^2 = k'^2 = k_j^2 = k_j'^2 = 0{,}5$ $\mathbf{E} = \mathbf{E}' = \mathbf{E}\left(1/\sqrt{2}\right)$; $\mathbf{K} = \mathbf{K}' = \mathbf{K}\left(1/\sqrt{2}\right)$ формула (4-28) приводится к виду

$$\mathbf{H}_q(0) = 1{,}39\nu_{0,1}\left(\sqrt{F}/\Delta_1\right)\mathbf{H}^{(0)}. \tag{4-30}$$

Эффективность экранирования цилиндром с квадратным поперечным сечением рассчитывается по формуле

$$Э^{к.ц(1)}(0) = \nu_{1,0}\Delta_1/(1{,}39\sqrt{F}). \tag{4-31}$$

Для общего случая напряженности внешнего магнитного поля $\mathbf{H}^{(0)}e^{i\nu}$, наклоненного под углом γ, напряженность в центре

$$\mathbf{H}_\gamma(0) = \mathbf{H}(0)\cos\gamma + i\mathbf{H}'(0)\sin\gamma, \tag{4-32}$$

где $\mathbf{H}'(0)$ является дополнительной к $\mathbf{H}(0)$, при которой в формуле (4-29) модули k и k' и эллиптические интегралы $\mathbf{E}$, $\mathbf{E}'$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}'$ заменяются.

Направление центрального поля обычно отличается от направления напряженности внешнего магнитного поля, за исключением напряженности поля при $\gamma = 0$ и $\gamma = \pi/2$. При квадратном сечении обе напряженности поля должны иметь то же направление для всех значений γ, потому что $\mathbf{H}(0) = \mathbf{H}'(0)$.

Как уже указывалось, поле внутри цилиндра с прямоугольным поперечным сечением является неоднородным. Его напряженность ослабляется к углам. Для получения более точных результатов необходимо учесть в расчете из формулы (4-25) члены с $n > 1$.

Для расчета напряженности поля по формуле (4-28) используются величины (рис. 4-3): $a = b/2$; $k'^2 = 0{,}654$; $k^2 = 0{,}346$; $\mathbf{E} = 1{,}425$; $\mathbf{K} = 1{,}741$; $\mathbf{E}' = 1{,}268$; $\mathbf{K}' = 2{,}013$; $a = b$; $k^2 = k'^2 = 0{,}5$; $\mathbf{K}' = \mathbf{K}(1/\sqrt{2}) = 1{,}854$; $\mathbf{E} = \mathbf{E}' = 1{,}351$; $\mathbf{J}_a = \mathbf{J}_b = 0{,}424$; $a = 2b$; $k'^2 = 0{,}346$; $k^2 = 0{,}654$, откуда

$$\begin{gathered}(1 + k'^2)(\mathbf{E} + \mathbf{E}') - 2k'^2\mathbf{K} - k^2\mathbf{K}' = 1{,}48, \quad a = b/2;\\ 3\mathbf{J}_a(1/\sqrt{2}) = 1{,}27, \quad a = b;\\ (1 + k^2)(\mathbf{E} + \mathbf{E}') - 2k^2\mathbf{K}' - k'^2\mathbf{K} = 1{,}09, \quad a = 2b.\end{gathered} \tag{4-33}$$

Сравнение величин выражений (4-33) с коэффициентом 1,39 из формулы (4-30) показывает, что цилиндр с квадратным поперечным сечением имеет лучший экранирующий эффект по сравнению с экранированием цилиндрами с прямоугольными сечениями, имеющими ту же площадь F. Для кругового цилиндра с той же площадью сечения численный коэффициент составляет 1,13.

Для получения упрощенных формул при расчете экранирующего эффекта цилиндров прямоугольного сечения на основании экспериментальных исследований можно рекомендовать схемы размещения цилиндра в поле с напряженностью, приложенной перпендикулярно оси (табл. 4-2). В таблице

$$N = [1/(1+p)]\left[1 - \frac{1{,}33}{q+6{,}66}\right]\left[1 - \frac{3}{40}\,\frac{(q-1{,}8)(q-20)}{(q+7{,}5)^{2{,}6}}\right],$$

$$N_z = \frac{1}{(L/D)^2-1}\left\{\frac{L/D}{[(L/D)^2-1]^{0{,}5}}\ln\left[(L/D)+((L/D)^2-1)^{0{,}5}\right]-1\right\}$$

— коэффициенты размагничивания; $q=(p+1)/p$; $p=(a/b)$; a и b — стороны прямоугольника (для квадрата $a=b$) соответственно параллельная и перпендикулярная направлению напряженности $\mathbf{H}^{(0)}$.

Круговые цилиндры конечной длины. В цилиндрах конечной длины магнитное поле, прошедшее во внутреннюю полость, состоит из двух частей: поля, прошедшего через оболочку, как и в бесконечном цилиндре, и поля, попавшего внутрь со стороны открытых концов.

Результирующая эффективность экранирования

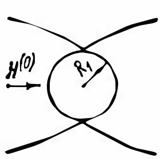
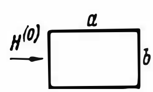
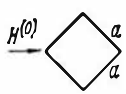
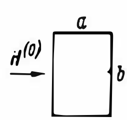
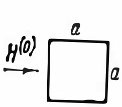
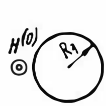
$$Э^{ц\,(1)} = Э_1 Э_2/(Э_1+Э_2), \tag{4-34}$$

где $Э_1$ и $Э_2$ — эффективность экранирования бесконечно длинным цилиндром и зависящая от наличия открытых концов. Из этой формулы следует, что наличие открытых концов снижает результирующую эффективность экранирования. Для определения $Э_1$ можно воспользоваться формулой (4-6):

$$Э_{1,\,q} = 1 + N_q(1-N_q)\,\nu_{1,\,0}(V_{эк}/V), \tag{4-35}$$

где $\nu_{1,\,0}=\mu_1/\mu_0$; $V_{эк}$ — объем ферромагнитного материала в эквивалентном полом эллипсоиде; V — объем, охватываемый внеш-

Таблица 4-2

Схема размещения цилиндра	Приближенная эффективность экранирования	Схема размещения цилиндра	Приближенная эффективность экранирования
	$\dfrac{\mu_1\Delta_1}{2R_1}$		$(b/a)=0{,}5 \div 2{,}0$ $\dfrac{2{,}52N\mu_1\Delta_1}{[1+0{,}56(b/a)]\,b}$
	$0{,}91\,\dfrac{\mu_1\Delta_1}{a}$		$b \gg a$ $\dfrac{2N\mu_1\Delta_1}{[1+0{,}5(b/a)]\,b}$
	$0{,}70\,\dfrac{\mu_1\Delta_1}{a}$		$L > D = 2R_1$ $\dfrac{4N_z(1-N_z)\,\nu_{1,0}\Delta_1}{D}$

ней оболочкой эллипсоида; N_q — коэффициент размагничивания эквивалентного сплошного эллипсоида вращения по оси q ($q = x,\ y,\ z$).

Если эквивалентный эллипсоид вытянут вдоль оси z, то

$$N_x = N_y = 0{,}5\,(1 - N_z), \qquad (4\text{-}36)$$

где $N_z = [1/(p^2 - 1)]\,\{[p/(p^2 - 1)^{0{,}5}]\ln[p + (p^2 - 1)^{0{,}5}] - 1\}$; $p = (a/b)$; a и b — большая и малая полуоси эллипсоида. Одновременно $p = (L/D_2)$ (L — длина, D_2 — внешний диаметр цилиндра).

Коэффициенты N_z, N_x, N_y для эллипсоидов вращения представлены в табл. 4-3.

Таблица 4-3

$p=a/b$	1	1,2	1,5	1,8	2,0	2,5	3,0	4,0	5,0
N_z	0,333	0,284	0,232	0,192	0,177	0,135	0,106	0,075	0,056
$N_x = N_y$	0,333	0,358	0,384	0,404	0,411	0,432	0,447	0,462	0,472

Рассмотрим два случая приложения напряженности внешнего помехонесущего магнитного поля.

1. Напряженность магнитного поля приложена перпендикулярно оси цилиндра. Эффективность экранирования можно определить из формулы (4-35) с учетом (4-36):

$$Э_{1(\perp)} = 1 + (\nu_{1,0}\Delta_1/D_2)(D/D_2)(1 - N_z^2), \qquad (4\text{-}37)$$

где Δ_1 — толщина оболочки; $D = 0{,}5\,(D_1 + D_2)$ — средний диаметр цилиндра (D_1 — внутренний диаметр цилиндра). При $p > 2{,}5$ коэффициент $N_z^2 < 0{,}02$, поэтому

$$Э_{1(\perp)} \approx 1 + (\nu_{1,0}\Delta_1/D_2)(D/D_2). \qquad (4\text{-}38)$$

В большинстве случаев $\Delta_1 \ll D_2$, $\nu_{1,0} \gg 1$, поэтому

$$Э_{1(\perp)} \approx \nu_{1,0}\Delta_1/D_2. \qquad (4\text{-}39)$$

Выражение (4-39) с достаточной для инженерных задач точностью определяет эффективность экранирования тонкостенным цилиндрическим экраном при $p > 2{,}5$.

Эффективность экранирования, учитывающая проникновение внешнего магнитного поля через открытые концы, в центре цилиндрического экрана

$$Э_{2(\perp)} = 1{,}5\exp[k_1\,(L/D_1)], \qquad (4\text{-}40)$$

где k_1 — нулевой корень для модифицированной цилиндрической функции первого рода $I_1(kr)$. В постоянном поле $k_1 = 3{,}832$. Таким образом, эффективность экранирования цилиндром, находящимся в поле с напряженностью, приложенной перпендикулярно оси, определяется по формуле (4-34) с учетом

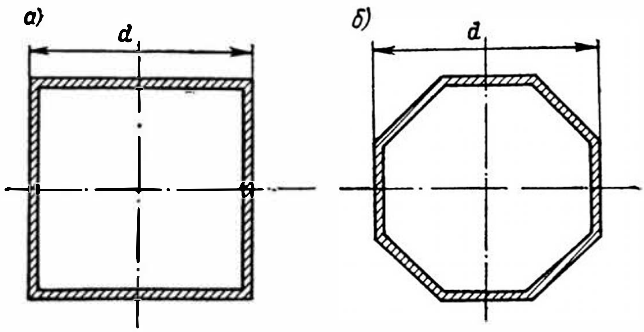


Рис. 4-5. Кубический (*а*) и октагональный (*б*) экраны

(4-39) и (4-40). Когда требуется определить эффективность экранирования не в центре, а в произвольной точке Q_j на оси цилиндра, то в формуле (4-34) для $Э_{2(\perp)}$ можно использовать выражение

$$Э_{2(\perp)} = 3\left[\exp\left(-k_1\frac{z_j}{R_1}\right) + \exp\left(-k_1\frac{L-z_j}{R_1}\right)\right]^{-1}, \qquad (4\text{-}41)$$

где $R_1 = D_1/2$; z_j — координата точки Q_j.

2. Напряженность магнитного поля приложена параллельно оси цилиндра. Эффективность экранирования

$$Э_{1(\parallel)} \approx 4N_z(1 - N_z)(\nu_{1,0}\Delta_1/D_2). \qquad (4\text{-}42)$$

Проникновение внешнего поля через открытые концы в центре цилиндрического экрана дает

$$Э_{2(\parallel)} = (1/2{,}6p^{0{,}5})\exp[k_2(L/D_1)], \qquad (4\text{-}43)$$

где k_2 — первый корень для модифицированной цилиндрической функции нулевого порядка $I_0(kr)$. В постоянном магнитном поле $k_2 = 2{,}405$.

Таким образом, эффективность экранирования цилиндром конечного размера, расположенного параллельно направлению напряженности поля, определяется по формуле (4-34)с учетом (4-42) и (4-43). Если необходимо определить $Э_{(\parallel)}$ не в центре, а в произвольной точке Q_j на оси цилиндра, то в формуле (4-34) можно использовать для $Э_{2(\parallel)}$ выражение

$$Э_{2(\parallel)} = [1/(1{,}3p)]\left[\exp\left(-k_2\frac{z_j}{R_1}\right) + \exp\left(-k_2\frac{L-z_j}{R_1}\right)\right]^{-1}. \qquad (4\text{-}44)$$

Коробчатые оболочки.

Экраны кубической формы (рис. 4-5, *а*). Особенности технического решения экранирующей системы иногда не позволяют делать оболочки простых геометрических форм. Часто приходится встречаться с экранами кубической формы. Используя накопленный опыт [48], можно рекомендовать находить эффективность экранирования оболочкой кубической формы аналогично расчету эффективности экранирования сферической оболочкой:

$$Э^{к\,(1)} = 1 + 0{,}7\,(\nu_{1,\,0}\Delta_1/d), \tag{4-45}$$

где d — длина ребра куба.

Для двухслойной кубической оболочки

$$Э^{к\,(2)} = 1 + 0{,}7\left(\frac{\nu_{1,\,0}\Delta_1}{d_1} + \frac{\nu_{2,\,0}\Delta_2}{d_2}\right) + 0{,}5\,\frac{\nu_{1,\,0}\nu_{2,\,0}\Delta_1\Delta_2}{d_1 d_2}\left(1 - p_{1,\,2}^3\right), \tag{4-46}$$

где $p_{1,\,2} = d_1/d_2$ и d_j ($j = 1,\ 2$) — длина внутреннего и внешнего ребер куба.

Используя (2-41), для многослойных кубических оболочек можно написать

$$Э^{к\nu} = \prod_{j=1}^{j=\nu} Э_j^{к\,(1)}\left(1 - p_{j-1,\,j}^3\right), \tag{4-47}$$

где $p_{j-1,\,j} = d_{j-1}d_j$.

Представленные формулы могут оказаться достаточными для решения задач экранирования лишь в приближенном виде. Важно правильно оценить магнитное состояние материала (см. § 2-2).

Экраны октагональной формы (рис. 4-5, *б*). Экран октагональной формы по эффективности экранирования занимает среднее положение между кубом и сферой:

$$Э^{ок\,(1)} = 1{,}1\nu_{1,\,0}\Delta_1/d, \tag{4-48}$$

где d — расстояние между противоположными параллельными сторонами.

Октагональная структура оказывается в четыре раза эффективнее для трех слоев, чем куб с тем же внутренним объемом.

Расчет однослойных магнитных экранов с помощью коэффициентов размагничивания. Коэффициентом размагничивания называется отношение напряженности $\mathbf{H}^{(0)}$ размагничивающего поля в намагниченном теле к намагниченности $\mathbf{J}$ в элементе dv объема тела V. Коэффициент размагничивания может быть как скалярной, так и векторной величиной, сложно зависящей от формы тела и магнитного состояния его материала. Коэффициент размагничивания имеет простой смысл, когда тело из любого однородного материала, имеющее форму эллипсоида и намагниченное однородно по всему его объему V (или размагниченное), вносится в однородное поле напряженностью $\mathbf{H}^{(0)}$. Тогда изменения намагниченности $\mathbf{J}$, вызываемые напряженностью $\mathbf{H}^{(0)}$, будут однородными, так как $\mathbf{H}^{(0)}$ при этих условиях остается однородным. Результирующее поле напряженностью $\mathbf{H}^{(i)} = \mathbf{H}^{(0)} + \mathbf{H}_0$, определяющее намагниченность $\mathbf{J}$, тоже будет однородным внутри всего тела. Только в этом случае для составляющих этих векторов по направлениям главных осей a, b, c эллипсоида справедлива формула

$$\mathbf{H}_q^{(i)} = \mathbf{H}_q^{(0)} - N_q \mathbf{J}_q, \quad q = a,\ b,\ c, \tag{4-49}$$

где N_q $(q = a, b, c)$ — коэффициенты размагничивания для соответствующих направлений эллипсоида; они зависят только от отношений a/b, a/c и не зависят ни от напряженности $\mathbf{H}^{(0)}$, ни от вида кривой намагничивания $\mathbf{J}(\mathbf{H}^{(i)})$ материала эллипсоида, ни от его предыдущих магнитных состояний. Если считать, что векторы $\mathbf{H}_q^{(i)}$, $\mathbf{H}_q^{(0)}$, $\mathbf{J}_q$ действуют в одном направлении, то формулу (4-49) можно преобразовать:

$$Э_q^{s\,(1)} = \mathbf{H}_q^{(0)}/\mathbf{H}_q^{(i)} = 1 + N_q \left(\mathbf{J}_q/\mathbf{H}_q^{(i)}\right). \tag{4-50}$$

Если $\mathbf{J}_q/\mathbf{H}_q^{(i)} \approx \nu_{1q,0}$ $(\nu_{1q,0} = \mu_{2q}/\mu_0)$, то из выражения (4-50)

$$Э_q^{s\,(1)} = 1 + N_q \nu_{1q,0} \approx 1 + N_q \nu_{1,0} \tag{4-51}$$

при пренебрежении изменением магнитной проницаемости материала по направлениям.

Если использовать для расчета эффективности экранирования формулу (4-51), то необходимо будет найти лишь коэффициент размагничивания N_q. Для некоторых тел такие данные имеются в справочниках. Для сложных по форме тел коэффициенты могут быть найдены экспериментально с использованием кривых намагничивания материала.

В табл. 4-4 представлены коэффициенты размагничивания для наиболее употребительных экранирующих оболочек. Считается, что $\nu_{1,0} \gg 1$; $\Delta_1/\xi_1 \ll 1$, где ξ_1 — радиус оболочки.

4-2. ОДНОСЛОЙНЫЕ ОБОЛОЧКИ В ОДНОРОДНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

Эллипсоиды трехосные. Определение экранирующих функций толстостенных эллипсоидальных оболочек методом, описанным в § 3-1, представляет известные трудности. Поэтому в дальнейшем используются решения, выполненные для тонкостенных эллипсоидов.

Рассмотрим эллипсоидальную оболочку (рис. 4-1) с полуосями a, b, c $(a > b > c)$, отнесенную к декартовой системе координат с началом в центре эллипсоида [8]. Оболочка считается немагнитной $(\mu_1 = \mu_0)$. Ее удельная поверхностная электрическая проводимость $\gamma_s = \gamma_1 \Delta_1$, где Δ_1 — толщина оболочки, γ_1 — электрическая проводимость. При $\Delta_1 \to 0$ и $\gamma_1 \to \infty$ величина γ_s является конечной. Эллипсоид находится под воздействием внешнего однородного поля напряженностью $\mathbf{H}^{(0)}$, изменяющейся во времени синусоидально с частотой ω. Эта задача сводится к решению уравнения Лапласа для скалярного потенциала v поля при граничных условиях (1-37), приобретающих в координатах

Таблица 4-4

Вид оболочки	Коэффициенты размагничивания N_q $(q=q_1,\ q_2,\ q_3)$	Формула для расчета $Э_q^{s\,(l)}$
Сферическая оболочка	$\frac{2}{9}\left(1-p_{1,2}^3\right)$	(2-27а)
Круговая цилиндрическая оболочка с полем (относительно оси): параллельным	$(p^2-1)^{-1}\{p(p^2-1)^{-0.5}\times$ $\times\ln[p+(p^2-1)^{0.5}]-1\}$	(4-35)
перпендикулярным	$0{,}25\left(1-p_{1,2}^2\right)$	(2-83а)
Эллипсоид трехосный: по оси a	$abc\left[(a^2-b^2)(a^2-b^2)^{0.5}\right]^{-1}\times$ $\times[\mathrm{F}(\varphi,\ k)-\mathrm{E}(\varphi,\ k)]$	(4-2)
по оси b	$abc\{[(a^2-b^2)(b^2-c^2)]^{-1}\times$ $\times(a^2-b^2)^{-0.5}\,\mathrm{E}(\varphi,\ k)-$ $-\left[(a^2-b^2)(a^2-c^2)^{0.5}\right]^{-1}\times$ $\times\mathrm{F}(\varphi,\ k)-c\,[ab(b^2-c^2)]^{-1}\}$	
по оси c	$abc\left\{b\,[ac(b^2-a^2)]^{-1}-\right.$ $\left.-\left[(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{0.5}\right]^{-1}\mathrm{E}(\varphi,\ k)\right\}$	
Эллипсоид вращения: вытянутый ($a=b$; $c/a=\Lambda>1$)	$\frac{2(\Delta_a/a)}{\Lambda^2-1}\left[\frac{\Lambda}{\sqrt{\Lambda^2-1}}\ln\left(\Lambda+\sqrt{\Lambda^2-1}\right)-1\right]$ N_c	(2-58)
сжатый ($a=b$; $\Lambda=1$)	$\frac{2(\Delta_a/a)}{\Lambda^2-1}\left(1-\frac{\Lambda}{\sqrt{1-\Lambda^2}}\arccos\Lambda\right)$ N_c	

Примечание. 1. Напряженность помехонесущего магнитного поля действует по направлению соответствующей оси q; $\mathrm{F}(\varphi,\ k)$ и $\mathrm{E}(\varphi,\ k)$ — неполные эллиптические интегралы первого и второго рода с модулем $k=[(a^2-b^2)/(a^2-c^2)]^{0.5}$ и аргументом $\varphi=\arcsin[1-(c^2/a^2)]^{0.5}$; $p=l/D$ (l — длина, D — внешний диаметр цилиндра).

2. Погрешность δ для расчета сферической оболочки $p_{2,1}^3-1/\left(3p_{2,1}^3\right)$, для расчета круговой цилиндрической оболочки с полем, перпендикулярным относительно оси, $\left(p_{2,1}^2-1\right)/\left(2p_{2,1}^2\right)$.

(λ, μ, ν) $(\lambda > -c^2 > \mu > -b^2 > \nu > -a^2)$ вид

$$\frac{\partial v}{\partial \lambda} = 0; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \lambda^2} = i\omega\mu_0\gamma_0 q \frac{\partial v_{\rm I}}{\partial \lambda}, \tag{4-52}$$

где $v = v_{\rm II} - v_{\rm I}$; $v_{\rm I} = v_1 + v^{(0)}$ и $v_{\rm II} = v_2 + v^{(0)}$ — скалярные потенциалы суммарного поля внутри и вне оболочки; $v^{(0)}$ — потенциал внешнего электромагнитного поля, действующего на оболочку; v_1 и v_2 — потенциалы поля оболочки во внутренней и внешней областях.

Для поверхностной проводимости γ_s удобно пользоваться формулой

$$\gamma_s = 2q\gamma_0 abc/\sqrt{\mu\nu}, \tag{4-53}$$

где (a, b, c) — оси внешнего эллипсоида с поверхностью $(\lambda = 0)$; q — некоторая постоянная, имеющая ту же размерность, что и коэффициент Ламе

$$h_\lambda = [(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)/(2R_\lambda)]^{0,5}.$$

Условие (4-53) равносильно требованию конфокальности наружной и внутренней поверхностей оболочки. Наибольшего значения $(2q\gamma_0 a)$ проводимость γ_s достигает при $\mu = -c^2$, $\nu = -b^2$ $(x = \pm a,\ y = z = 0)$; наименьшего $(2q\gamma_0 c)$ — при $\mu = -b^2$, $\nu = -a^2$ $(x = y = 0,\ z = \pm c)$.

Напряженность действующего на оболочку внешнего магнитного поля можно разложить на составляющие, параллельные осям (x, y, z). Поскольку ход решения задачи для всех составляющих одинаков, достаточно рассмотреть только одну из них. Для определенности будем считать напряженность поля параллельной оси x. При этом потенциалы

$$\begin{aligned} v^{(0)} &= -CE_{11}(\lambda) E_{11}(\mu) E_{11}(\nu); \\ v_1 &= AE_{11}(\lambda) E_{11}(\mu) E_{11}(\nu); \\ v_2 &= BF_{11}(\lambda) E_{11}(\mu) E_{11}(\nu), \end{aligned} \tag{4-54}$$

где $C = H_x^{(0)}/[(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)]^{0,5}$; E_{11} и F_{11} — функции Ламе первого и второго рода степени $n = 1$.

Запись потенциалов v_j $(j = 0, 1, 2)$ в виде (4-54) возможна лишь при симметрии поля относительно плоскостей xy, yz, zx.

Напряженность поля внутри оболочки

$$\mathbf{H}_{\rm I x} = -\frac{\partial v_{\rm I}}{\partial x} = -\frac{\partial\left(v_1 + v^{(0)}\right)}{\partial x} = (C - A)\left[(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)\right]^{0,5};$$

$$\mathbf{H}_{\rm I y} = \mathbf{H}_{\rm I z} = 0.$$

В рассматриваемом случае поле в области D_0 внутри оболочки однородно и направлено по оси x, т. е. параллельно внешнему полю напряженностью $\mathbf{H}_x^{(0)}$. Эффективность экранирования, одинаковая для всех точек области D_0,

$$Э^{эл\,(1)} = \mathbf{H}_x^{(0)}/\mathbf{H}_{1x} = 1 + i\xi, \qquad (4\text{-}55)$$

где

$$\xi = -1{,}33\omega\mu_0\gamma_0 q \frac{a^2b^3c^3}{b^2+c^2} F'_{11}(0); \qquad (4\text{-}56)$$

$$F'_{11}(0) = \frac{3}{2a}\left[\frac{\mathbf{F}(\varphi,\,k) - \mathbf{E}(\varphi,\,k)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)^{0,5}} - \frac{1}{abc}\right]$$

— производная от $F_{11}(\lambda)$ по λ при $\lambda = 0$ [$\mathbf{F}(\varphi, k)$ и $\mathbf{E}(\varphi, k)$ — неполные эллиптические интегралы первого и второго рода]; $k = (a^2 - b^2)/(a^2 - c^2)$ — модуль; φ — аргумент: $\sin\varphi = [1 - (c^2/a^2)]^{0.5}$.

Формула (4-55) справедлива и при действии двух других составляющих напряженности магнитного поля. Поэтому можно утверждать, что при изменении γ_s по закону (4-53) эллипсоидальная оболочка является однородно экранирующей по отношению к однородному внешнему полю любого направления. Выражение (4-55) для эффективности экранирования эллипсоидальным экраном имеет такой же вид, как и (3-59) для сфероидальных экранов. При $b = c$ выражение (4-56) дает для величины ξ значение, совпадающее с полученными для вытянутого сфероидального экрана (3-61) с соответствующим направлением напряженности внешнего поля. Влияние величины c/b на эффективность экранирования эллипсоидальным экраном приведено на рис. 4-6. Здесь приведена рассчитанная по формуле (4-56) зависимость коэффициента ξ от отношения c/b при постоянстве b/a и фиксированном минимальном значении поверхностной проводимости оболочки γ_s (значения ξ отнесены к ξ_1 при $c/b = 1$). Видно, что при c/b, близком к единице, отношение ξ/ξ_1 близко к единице. Чем больше различие размеров b и c, тем больше отличается коэффициент ξ для эллипсоидального экрана от соответствующего значения для сфероидального экрана. В подобных случаях расчет по формулам, относящимся к сфероидальным оболочкам, может дать заведомо преувеличенное представление об эффективности экрана.

Тороидальные экраны (рис. 4-7). Задачи экранирования тороидальными оболочками интересна в отношении оценки влияния, которое оказывает на экранирующую способность трубчатой оболочки кривизна ее оси. Помехонесущее электромагнитное поле напряженностью

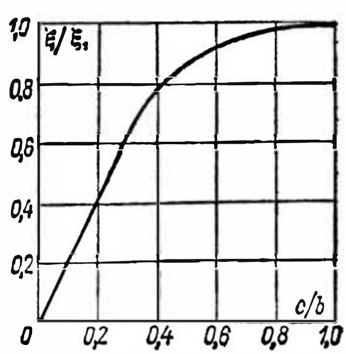


Рис. 4-6. Зависимость коэффициента ξ от отношения c/b при $b/a = 0{,}5$

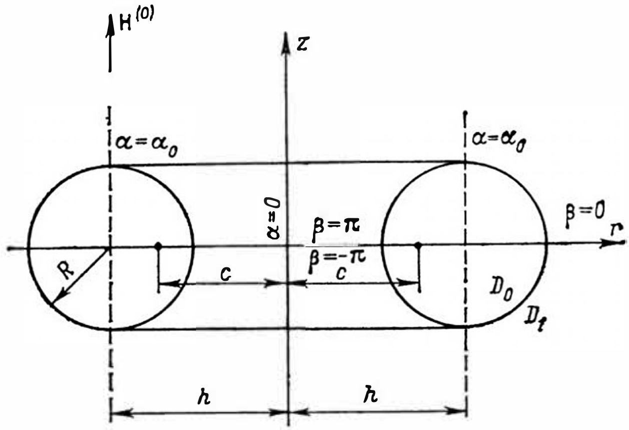


Рис. 4-7. Тороидальный экран

$\mathbf{H}^{(0)}$ однородно и направлено по оси симметрии тора (ось z). При расчете эффективности экранирования тороидальной оболочкой используется метод Г. Кадена [25], заключающийся в том, что:

1) определяется составляющая напряженности магнитного поля на внешней стороне поверхности, считая со стороны возбуждения оболочку идеально проводящей;

2) зная составляющие напряженности магнитного поля, находят соответствующие составляющие напряженности электрического поля на другой граничной поверхности, полагая, что электрическая проводимость материала оболочки хотя и велика, но конечна;

3) составляющую напряженности магнитного поля в экранированной области определяют из решения соответствующей краевой задачи, используя найденные значения вектора $\mathbf{E}$ для формулировки граничных условий.

Поле внутри тора неоднородно. Поэтому понятие об эффективности экранирования в данном случае применимо лишь по отношению к определенной составляющей напряженности в определенной точке экранируемой области.

В точке наблюдения, взятой на осевой линии тора (линии $z=0$, $r=c$), где сходятся все линии $\beta=\mathrm{const}$ и где координата $\alpha\to\infty$, напряженность магнитного поля перпендикулярна плоскости $z=0$ и на линии $\beta=\pi/2$ имеет только составляющую

$$\mathbf{H}_\alpha=(h_\varphi h_\beta \mu_0)^{-1}\frac{\partial\theta}{\partial\beta},$$

где h_φ, h_β — коэффициенты Ламе; θ — функция потока.

Эффективность экранирования на оси тора определяется в виде

$$Э^{т\,(1)} = \frac{8c^2 k_1}{R \exp(-k_1 \Delta_1)} \frac{2Q^1_{1/2}(\operatorname{ch}\alpha_0)\, Q^1_{-1/2}(\operatorname{ch}\alpha_0)}{2d_0 Q^1_{1/2}(\operatorname{ch}\alpha_0) + 3d_1 Q^1_{-1/2}(\operatorname{ch}\alpha_0)}, \quad (4\text{-}57)$$

где $k_1^2 = i\omega\mu_0\gamma_1$; $Q^1_n(\xi)$ — присоединенные функции Лежандра ($n = -1/2;\ +1/2$); $\xi = \operatorname{ch}\alpha_0$.

Для уединенного кругового цилиндра радиусом R эффективность экранирования выражается формулой

$$Э^{ц\,(1)} = Rk_1 \exp(k_1\Delta_1).$$

Отношение $\eta = Э^{т\,(1)}/Э^{ц\,(1)}$, характеризующее влияние кривизны осевой линии оболочки на ее экранирующую способность, выразится в виде

$$\eta = \frac{16c^2}{R^2} \frac{Q^1_{1/2}(\operatorname{ch}\alpha_0)\, Q^1_{-1/2}(\operatorname{ch}\alpha_0)}{2d_0 Q^1_{1/2}(\operatorname{ch}\alpha_0) + 3d_1 Q^1_{-1/2}(\operatorname{ch}\alpha_0)}, \quad (4\text{-}58)$$

где $d_0 = b_0 \operatorname{ch}\alpha_0 - 0{,}5b_1$; $d_1 = b_1 \operatorname{ch}\alpha_0 - b_0 - 0{,}5b_2$; $b_0 = -(1-F)/$ $/P^1_{-1/2}(\operatorname{ch}\alpha_0)$; $b_k = 2\left[4k_1^2 - (1-F)\right]/P^1_{k-1/2}(\operatorname{ch}\alpha_0)$; $P^{(1)}_n(\operatorname{ch}\alpha_0)$, $Q^{(1)}_n(\operatorname{ch}\alpha_0)$ — присоединенные функции Лежандра, $n = -1/2$; $+1/2$; $k - 1/2$; $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ \infty$;

$$F = \frac{1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k}{1 - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{4k^2 - 1}}; \quad \xi_k = 2\frac{Q^1_{k-1/2}(\operatorname{ch}\alpha_0)\, P^1_{-1/2}(\operatorname{ch}\alpha_0)}{Q^1_{-1/2}(\operatorname{ch}\alpha_0)\, P^1_{k-1/2}(\operatorname{ch}\alpha_0)}.$$

Эффективность экранирования тороидальным экраном может отличаться на 30 % и более от эффективности экранирования соответствующим цилиндрическим экраном. Эффективность экранирования разомкнутым тороидальным экраном ниже, чем цилиндрическим экраном. Таким образом, кривизна оси приводит к некоторому уменьшению эффективности экранирования. Эффективность экранирования короткозамкнутым тороидальным экраном выше, чем разомкнутыми экранами (цилиндрическим и тороидальным).

При $R/h \leqslant 0{,}5$, представляющих практический интерес, средняя эффективность экранирования лишь незначительно отличается от эффективности экранирования, определенной для точек осевой линии экрана. В подобных случаях при оценке эффективности экранирования можно пользоваться формулой (4-57).

Цилиндрические оболочки.

Цилиндры с прямоугольным поперечным сечением (рис. 4-2). При расчете используется метод Г. Кадена [39], уже приме-

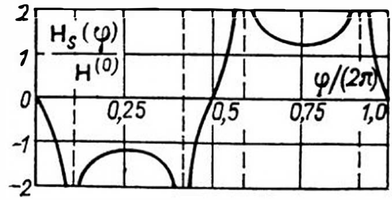


Рис. 4-8. Зависимость величины $H_s(\varphi)/H^{(0)}$ для $a/b = 0{,}5$ в функции φ в w-плоскости

ненный в § 4-1. Предполагается, что напряженность внешнего магнитного поля не проходит через поверхность прямоугольного цилиндра, но отражается тангенциально. Скалярный потенциал внутри цилиндра может быть рассчитан с помощью интеграла Пуассона

$$z_j(w) = -\frac{i}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{w}{r_0}\right)^n \int_0^{2\pi} Y_j(r_0, \varphi)\, e^{-in\varphi}\, d\varphi, \tag{4-59}$$

откуда

$$Y_j(r_0, \varphi) = \mathbf{H}_s(\varphi)\,\delta/[(1+i)\,\mathrm{sh}\,[(1+i)(d/\delta)]]; \tag{4-60}$$

$$\mathbf{H}_s(\varphi) = -\mathbf{H}^{(0)}\frac{\sin\varphi}{\sqrt{|\sin^2\varphi - \sin^2\varphi_0|}} \tag{4-61}$$

является тангенциальной составляющей напряженности магнитного поля вдоль внешней поверхности прямоугольника.

На рис. 4-8 показана величина $\mathbf{H}_s(\varphi)/\mathbf{H}^{(0)}$ для $a/b = 0{,}5$ в функции φ в w-плоскости. Очевидно, что $\mathbf{H}_s$ — бесконечная величина в точках $\varphi = \varphi_0$, $\pi - \varphi_0$, $\pi + \varphi_0$, $2\pi - \varphi_0$, которые соответствуют четырем углам прямоугольника ($\varphi_0 = 36°$). Как уже отмечалось в § 4-1, оценка в интеграле (4-59) для произвольного n представляет трудности. Поэтому ограничимся расчетом напряженности поля $\mathbf{H}(0)$ в центре прямоугольника, учитывая лишь член с $n = 1$.

Используя (4-26), получим

$$\mathbf{H}(0) = (4/\pi)\frac{\mathbf{H}^{(0)}\delta}{(1+i)\,B\,\mathrm{sh}\,[(1+i)(\Delta_1/\delta)]}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{|\sin^2\varphi_0 - \sin^2\varphi|}}. \tag{4-62}$$

Эллиптический интеграл рассчитывается в этой формуле обычными методами, откуда

$$\mathbf{H}(0) = (4/\pi)\sqrt{k_j k_j'}\,(\mathbf{K} - \mathbf{E} + \mathbf{E}')\frac{\delta\mathbf{H}^{(0)}}{(1+i)\sqrt{F}\,\mathrm{sh}\,[(1+i)(\Delta_1/\delta)]}, \tag{4-63}$$

где $F = 4ab$. Так, для квадратного сечения ($a = b$) выражение (4-63) преобразуется к виду

$$\mathbf{H}_q(0) = (4/\pi)\,\mathbf{K}^2\left(1/\sqrt{2}\right)\frac{\delta\mathbf{H}^{(0)}}{(1+i)\sqrt{F}\,\mathrm{sh}\,[(1+i)(\Delta_1/\delta)]}.$$

Из формулы (4-63) следует, что поле внутри прямоугольного цилиндра неоднородно. Эффективность экранирования прямоугольным цилиндром, расположенным перпендикулярно направлению напряженности поля, можно представить в виде

$$Э^{п.ц(1)}(0)=\frac{\pi(1+i)\sqrt{F}\,\mathrm{sh}\,[(1+i)(\Delta_1/\delta)]}{4\sqrt{k_jk_j'}(\mathrm{K}-\mathrm{E}+\mathrm{E}')\,\delta}, \qquad (4\text{-}64)$$

где δ — глубина поверхностного слоя; Δ_1 — толщина оболочки.

Для квадратного сечения

$$Э^{к.ц(1)}=\pi(1+i)\sqrt{F}\,\mathrm{sh}\,[(1+i)(\Delta_1/\delta)]/\left[4\mathrm{K}^2\left(1/\sqrt{2}\right)\delta\right]. \qquad (4\text{-}65)$$

Если напряженность помехонесущего поля не параллельна оси (рис. 4-2), а составляет с ней угол γ, то могут быть использованы рассуждения, содержащиеся в § 4-1.

Используя величины: $a/b=1/2$; $k^2=0{,}346$; $\varphi_0=36°$; $\mathrm{E}=1{,}425$; $\mathrm{K}=1{,}741$; $\mathrm{E}'=1{,}268$; $\mathrm{K}'=2{,}013$; $\mathrm{K}_j=1{,}583$; $\mathrm{K}_j'=3{,}153$; $a=b$; $k^2=0{,}5$; $\mathrm{K}=\mathrm{K}_j\left(1/\sqrt{2}\right)=1{,}854$; $\mathrm{E}=\mathrm{E}_j\left(1/\sqrt{2}\right)=1{,}351$; $a/b=2$; $k^2=0{,}346$; $\varphi_0=36°$; $\mathrm{E}'=1{,}268$; $\mathrm{K}'=2{,}013$; $\mathrm{E}=1{,}425$; $\mathrm{K}=1{,}741$, получим

$$(4/\pi)\sqrt{k_jk_j'}(\mathrm{K}-\mathrm{E}+\mathrm{E}')=4{,}51, \qquad a=b/2;$$

$$(4/\pi)\,\mathrm{K}^2\left(1\sqrt{2}\right)=4{,}38, \qquad a=b;$$

$$(4/\pi)\sqrt{k_jk_j'}(\mathrm{K}'-\mathrm{E}'+\mathrm{E})=6{,}17, \qquad a=2b.$$

При условии $F=\mathrm{const}$ цилиндр с квадратным поперечным сечением дает максимальный экранируемый эффект. Для кругового цилиндра такой коэффициент составляет 3,54. Поэтому круговое сечение всегда предпочтительнее, чем прямоугольное, в том числе и квадратное. Для расчета эффективности экранирования цилиндром с прямоугольным поперечным сечением в электромагнитном поле с продольной магнитной напряженностью можно воспользоваться выражением [33]

$$Э^{п.ц(1)}=\mathrm{ch}\,(\eta\Delta_1)+[\eta ab/(a+b)\,\nu_{1,0}]\,\mathrm{sh}\,(\eta\Delta_1), \qquad (4\text{-}66)$$

где $\eta=(1+i)/\delta$; a и b соответствуют рис. 4-2.

Круговые цилиндры конечной длины. При расчете эффективности экранирования при очень низких частотах ($f<10^4$ Гц) можно воспользоваться результатами § 4-1. При $f>10^4$ Гц можно воспользоваться теорией цепи. Пусть конечный цилиндр (рис. 4-9) находится в продольном однородном электромагнитном поле напряженностью $\mathbf{H}=\mathbf{H}^{(0)}\sin\omega t$. По теории цепей эффективность экранирования бесконечным круговым цилиндром

$$Э^{ц(1)}=\left(1+\omega^2\tau^2\right)^{0,5}/\sin(\omega t-\varphi),$$

где $\tau=\mu_0R_2\Delta_1\gamma_1K\cdot 0{,}5$; $\mathrm{tg}\,\varphi=\omega\tau$; R_2 — внешний радиус экрана; ν_1 — электрическая проводимость экрана; $K\leqslant 1$ — коэффициент, зависящий от размеров экрана (R_2/l, l — длина цилиндра).

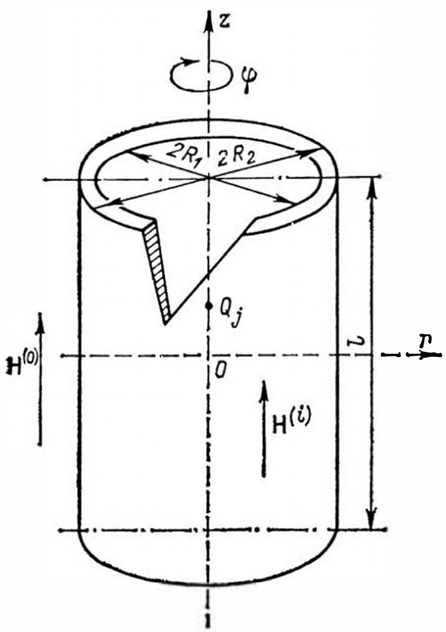


Рис. 4-9. Конечный круговой цилиндр в продольном поле с напряженностью $\mathbf{H}^{(0)}$

Для короткого цилиндра с открытыми концами

$$Э_0^{ц(1)} = (1+\omega^2\tau^2)^{0,5}/[1+(1-\beta)^2\omega^2\tau^2]^{0,5}\sin(\omega t-\Phi), \quad (4\text{-}67)$$

где $\operatorname{tg}\Phi = \beta\omega\tau/|1+(1-\beta)\times\omega^2\tau^2|$; $\beta = g/K$; $g = F(R_2/l)$ —коэффициент, зависящий только от размеров экрана.

Если $\omega\tau\to\infty$, то на основании (4-67) эффективность экранирования $Э_0^{ц(1)}\to 1/|1-\beta|$.

Видно, что из-за концевого эффекта ($\beta\neq 1$) напряженность пульсирующего поля в центре цилиндра остается конечной даже при высокой частоте. По существу, определению подлежат лишь коэффициенты g и K.

Для тонкостенных цилиндров

$$g = [l/(2R_2)]\{1+[l/(2R_2)^2]\}^{-0,5};$$

$$K = \mathbf{E}(k,\pi/2) = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

где $\mathbf{E}(k,\pi/2)$ — полный эллиптический интеграл второго рода с модулем $k=[1+(2R_2/l)^2]^{-0,5}$ и аргументом $\varphi=\arcsin[1-(l/R_2)^2]^{0,5}$.

Зависимость β от коэффициента формы $l/(2R_2)$ представлена на рис. 4-10. В то время как K и g увеличиваются при увеличении $l/(2R_2)$, отношение $\beta = K/g$ проходит через максимум и лишь затем стремится к асимптотической величине $\beta=1$. При $\beta=1$ $[l/(2R_2)\to\infty]$, т. е. при бесконечной длине, цилиндр является совершенным экраном для высокочастотных пульсаций. В процессе экспериментов на экранах с размерами $l/(2R_2)\in[0,6\ \ldots\ 6,0]$ установлено, что экран с раз-

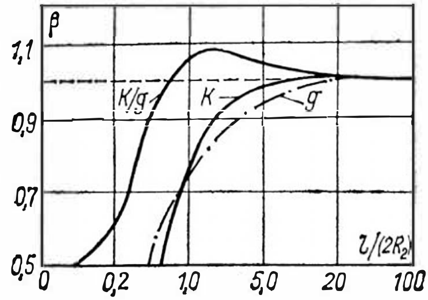


Рис. 4-10. Зависимость β от коэффициента формы $l/(2R_2)$

мерами $l/(2R_2) \approx 0{,}9$ эффективнее экранирует высокочастотные пульсации, чем длинные.

Реакция полых цилиндров на переменное электромагнитное поле была проанализирована на основе теории цепей с омическим рассеянием. В этом приближении напряженность поля, проникающего во внутреннюю часть, уменьшается как $(\omega\tau)^{-1}$, где $\tau = L/R_2$ — постоянная времени полого цилиндра; ω — угловая частота. При высоких частотах возбужденные токи стремятся концентрироваться на поверхности цилиндра из-за поверхностного эффекта, и напряженность проходящего магнитного поля уменьшается пропорционально изменению частоты. Окончательно значение напряженности проходящего поля зависит от величины концевого эффекта и определяется отношением длины к диаметру. Эти качества проявляются также в сверхпроводящем состоянии, хотя механизм потерь более сложен, чем омический процесс. Наиболее эффективными для уменьшения высокочастотных пульсаций являются цилиндры с отношением $l/(2R_2) = 0{,}88$.

Проводящие оболочки произвольной формы. Для приближенных оценок функций экранирования произвольных по форме проводящих немагнитных оболочек при внутреннем возбуждении должны быть выполнены следующие условия:

экранирование можно рассматривать с позиций дальнего и ближнего;

при расчете напряженности ближних электромагнитных полей важно учитывать реальные размеры оболочки, поэтому экранирующие функции должны быть получены с учетом геометрических неоднородностей оболочки, что требует кропотливых, как правило, численных расчетов;

при расчете напряженности дальних электромагнитных полей оболочки произвольных геометрических форм могут заменяться на аналитические: опорные или эквивалентные; опорные оболочки близки по основным геометрическим соотношениям к реальным и могут быть исследованы с помощью теории возмущений; эквивалентные оболочки могут быть построены с помощью изопериметрических неравенств.

Эквивалентные оболочки. Эти оболочки могут быть построены для цилиндрических оболочек произвольного поперечного сечения введением эквивалентной круговой цилиндрической оболочки, методы расчета функций экранирования которой для всех видов электромагнитных полей хорошо изучены.

Известно [39], что цилиндрические оболочки произвольного поперечного сечения обладают худшими экранирующими функциями, чем оболочки с круговым поперечным сечением. Поэтому круговой цилиндр даёт нам верхнюю границу для эффективности экранирования.

Используя результаты работы [37], определим эквивалентные радиусы для некоторых конфигураций поперечного сечения оболочек (рис. 4-11). Здесь r_j $(j = 1, \ldots, 6)$ — эквивалентные

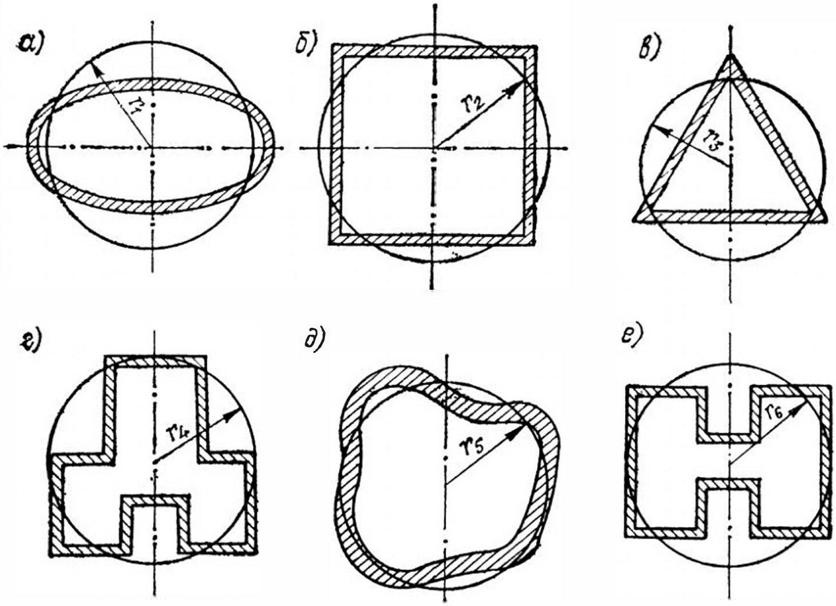


Рис. 4-11. Цилиндрические оболочки со сложным поперечным сечением

радиусы соответствующей формы оболочек толщиной Δ_i с электрической проводимостью материала γ_i:

$$r_j = 0{,}5\,\{(A/\pi)^{0{,}5} + [P/(2\pi)]\}^{0{,}5}, \qquad (4\text{-}68)$$

где A и P — площадь и периметр поперечного сечения оболочки.

Формула (4-68) базируется на изопериметрических неравенствах для проводников произвольной формы. Электромагнитные свойства электрически тонких оболочек ($\Delta_1 < \delta$) зависят непосредственно от физических свойств этих структур. Поскольку круг имеет наименьший периметр для данной площади, круговая оболочка обладает минимальным эквивалентным радиусом для любых оболочек с заданным поперечным сечением. Можно показать, что величины в формуле (4-68) являются функциями круга. Границы существенно различаются, если фигуры не имеют оси симметрии или отличаются от круга. В таких случаях можно использовать симметризацию, описанную в работе [37].

Для цилиндрических оболочек, представленных на рис. 4-11, можно рекомендовать следующие эквивалентные радиусы:

для эллипса (рис. 4-11, a)

$$r_1 = 0{,}5\,(A/\pi)^{0{,}5}\left[(1 - e^2)^{0{,}25} + (1 - e^2)^{-0{,}25}\right], \qquad (4\text{-}69)$$

где e — эксцентриситет; из этой формулы следует, что эквивалентный радиус слабо зависит от эксцентрисистета;

для прямоугольника со сторонами a и b и с эксцентриситетом $e=[1-(b/a)^2]^{0,5}$ (рис. 4-11, *б*)

$$r_2=0,5(A/\pi)^{0,5}\left[1-\pi^{-0,5}(1-e^2)^{0,25}+\pi^{-0,5}(1-e^2)^{-0,25}\right]; \quad (4\text{-}70)$$

точное значение r_2 рассчитано в работе [37], расхождение не превышает нескольких процентов; для эллипсов с малыми эксцентриситетами радиусы не зависят от эксцентриситета, для эллипсов с большими эксцентриситетами приближенный и точный эквивалентные радиусы принимают одинаковую функциональную форму, эквивалентную эллипсоидальной;

для цилиндров с сечением в виде равностороннего N-угольника (рис. 4-11, *в*)

$$r_N=0,5(A/\pi)^{0,5}[1+(N\,\mathrm{tg}(\pi/N)/\pi)^{0,5}]; \quad (4\text{-}71)$$

эта формула может быть использована и для цилиндра с сечением в виде неравностороннего N-угольника;

для сложных поперечных сечений, в том числе и изображенных на рис. 4-11, *г—е*, получить аналитические выражения в общем виде затруднительно. Следует решения находить численно.

4-3. ОБОЛОЧКИ В НЕОДНОРОДНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

Аналитические результаты, приведенные в соответствующих главах справочника, не всегда дают возможность быстро оценить эффективность экранирования примененной облочкой, в частности, из-за использования специальных функций. Попытки учесть действительную форму экрана и различные нарушения его герметичности (щели, стыки, отверстия и т. д.) настолько усложняют задачу, что делают ее иногда просто нерешаемой. Кроме того, реальная структура поля также далека от идеальной. Поле усложнено многократными отражениями электромагнитной волны от окружающих предметов. Напряженность поля у различных преград оказывается различной из-за дифракции. Это делает различной их эффективность экранирования.

Можно рекомендовать приближенную методику оценки эффективности экранов без выполнения моделей и проведения экспериментов. Необходимо оценить ту часть электромагнитной энергии, которая проникает внутрь экрана и представляет собой сумму энергий, проникающих через различные преграды с площадями $S^{(j)}$.

Обозначим $w_0^{(j)}$ и $w_i^{(j)}$ — плотность падающего на преграду и прошедшего сквозь нее потоков энергии; $W_0^{(j)}$, $W_i^{(j)}$ — потоки падающей на преграду и прошедшей сквозь нее энергии. Эффективность экранирования преградой $Э^{(j)}$ оценивается по формуле (1-76).

Потоки энергии рассчитываются по формулам

$$W_0^{(j)} = 0{,}5 \int\limits_V [\varepsilon |\mathbf{E}_0^{(j)}|^2 + \mu |\mathbf{H}_0^{(j)}|^2]\, dv;$$
$$W_i^{(j)} = 0{,}5 \int\limits_V [\varepsilon |\mathbf{E}_i^{(j)}|^2 + \mu |\mathbf{H}_i^{(j)}|^2]\, dv, \qquad (4\text{-}72)$$

где ε и μ — диэлектрическая и магнитная проницаемость среды; V — объем материала преграды.

Суммируем потоки энергии для всех преград, прошедшие внутрь экрана:

$$\sum_{j=1}^{n} W_i^{(j)} = \sum_{j=1}^{n} (w_i^{(j)} S^{(j)}/Э^{(j)}),$$

где $j = 1, 2, \ldots$; n — число преград.

Тогда эффективность экранирования

$$Э^s = \sum_{j=1}^{n} W_0^{(j)} \Big/ \sum_{j=1}^{n} W_i^{(j)} = \sum_{j=1}^{n} w_0^{(j)} S^{(j)} \Big/ \sum_{j=1}^{n} w_i^{(j)} S^{(j)}/Э^{(j)}. \qquad (4\text{-}73)$$

Если источник поля удален на значительное расстояние по сравнению с размерами экрана, то плотность потока энергии $w_0^{(j)}$ у всех преград примерно одинакова. Тогда

$$Э^s = \sum_{j=1}^{n} S^{(j)} \Big/ \sum_{j=1}^{n} S^{(j)}/Э^{(j)}. \qquad (4\text{-}74)$$

Доля плотности потока, прошедшего через каждую преграду, прямо пропорциональна ее площади и обратно пропорциональна эффективности экранирования.

Значения $w_0^{(j)}$ задаются, исходя из свойств возможных источников электромагнитного поля. Получить их можно также непосредственными измерениями или пересчетом из измеренных величин электрической или магнитной составляющих напряженностей поля $\left(w_0^{(j)} = F_1(\mathbf{E});\ w_0^{(j)} = F_2(\mathbf{H})\right)$, которые измеряются в месте предполагаемого расположения проектируемого экрана. Эффективность экранирования $Э^{(j)}$ можно измерить для соответствующих образцов экранирующих материалов или рассчитать, поскольку эта величина является функцией электрической проводимости γ_j и магнитной проницаемости μ_j экранов, толщины Δ_j и частоты f: $Э^{(j)} = F_3(\gamma_j, \mu_j, \Delta_j, f)$. При более точном анализе требуется учесть зависимость магнитной проницаемости от напряженности воздействующего электромагнитного поля, т. е. от плотности потока энергии падающей волны: $Э^{(j)} = F_4\left(\gamma_j, \mu_j, w_0^{(j)}, \Delta_j, f\right)$. Подобный подход к рассмотрению задач электромагнитного экранирования содержится в работе [27], где эффективность экранирования экрана со щелями или сплошного экрана с вентиляционным отверстием определяется как произведение эффективности экранирования двух идеализированных экранов.

ГЛАВА ПЯТАЯ

НЕОДНОРОДНЫЕ ОБОЛОЧКИ

5-1. ЭКРАНИРОВАНИЕ ОБОЛОЧКАМИ ОДНОРОДНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Оболочки с отверстиями.

Плоская пластина с круглым отверстием. В экранах по условиям эксплуатации часто приходится делать отверстия. Основной задачей расчета параметров таких экранов является расчет напряженности поля, проникающего через отверстие. К решению этой задачи сводится и расчет дифракции от экрана с открытыми краями, например плоского заземленного ферромагнитного листа, расположенного между двумя устройствами, которые должны быть изолированы друг от друга. Конструктору важно знать, какие размеры следует придать этому листу, чтобы напряженность огибающего края поля была достаточно малой. Вместо прямоугольных отверстий, чаще всего встречающихся на практике, при расчете используются эквивалентные круглые отверстия.

Разделим окружающее пространство на три области (рис. 5-1): внешняя область D_0, область отверстия и внутренняя область D_1. Введем сферические координаты (r, θ, φ). Координата φ войдет в формулы, так как в выражение для напряженности однородного помехонесущего поля входит множитель $\sin\varphi$:

$$\lim_{r\to\infty} v_1 = \mathbf{H}^{(0)} r \sin\theta \sin\varphi, \qquad 0 < \theta < \pi/2. \tag{5-1}$$

Уравнение Лапласа для расчета v_1 записывается в виде (1-16) в сферических координатах. На поверхности экрана напряженность магнитного поля направлена по касательной к поверхности, следовательно, ее нормальная составляющая равна нулю:

$$\mathbf{H}_\theta = 0, \quad \theta = \pi/2. \tag{5-2}$$

Граничное условие (5-2) может быть таким лишь в режиме высокой частоты, когда поле полностью вытеснено из металла. Суммарные

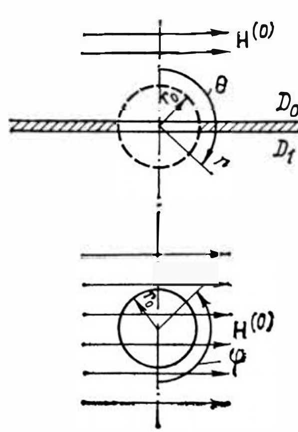


Рис. 5-1. Плоская пластина с круглым отверстием

скалярные потенциалы в каждой из областей записываются в виде

$$v_1 = \mathbf{H}^{(0)} r \sin\theta \sin\varphi + \sin\varphi \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} C_n r^{-n-1} P_n^{(1)}(\cos\theta),$$

$$r \geqslant r_0; \quad 0 < \theta < \pi/2; \tag{5-3}$$

$$v_2 = -\sin\varphi \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} C_n r^{-n-1} P_n^{(1)}(\cos\theta), \quad r \geqslant r_0; \ \pi/2 < \theta < \pi.$$

Решения (5-3) можно объединить в одно для всей области, внешней относительной сферы [10]:

$$v_{\mathrm{I}} = 0{,}5\mathbf{H}^{(0)} r \sin\varphi \sin\theta - 0{,}5\mathbf{H}^{(0)} r \sin\varphi \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} b_{m,1} P_m^{(1)}(\cos\theta) +$$

$$+ \sin\varphi \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} b_{m,n} C_n r^{-n-1} P_m^{(1)}(\cos\theta). \tag{5-4}$$

Для сферической области отверстия ($r \leqslant r_0$)

$$v_{\mathrm{II}} = 0{,}5\mathbf{H}^{(0)} r \sin\varphi \sin\theta + \sin\varphi \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} D_m r^m P_m^{(1)}(\cos\theta). \tag{5-5}$$

Из условия непрерывности касательных и нормальных составляющих напряженности магнитного поля на поверхности сферической области отверстия ($r = r_0$) получим системы уравнений для определения постоянных интегрирования, а через них — и формулы для определения потенциалов v_1, v_2:

$$v_1 = \mathbf{H}^{(0)} r \sin\varphi \sin\theta +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \mathbf{H}^{(0)} r_0 \sin\varphi \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{0,5(n-1)}}{n(n+2)} (r_0/r)^{n-1} P_n^{(1)}(\cos\theta);$$

$$v_2 = -\frac{2}{\pi} \mathbf{H}^{(0)} r_0 \sin\varphi \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{0,5(n-1)}}{n(n+2)} (r_0/r)^{n+1} P_n^1(\cos\theta). \tag{5-6}$$

Эффективность экранирования плоским экраном с круглым отверстием можно записать в виде

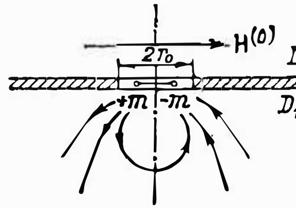
$$Э_0^{\text{п}\,(1)} \approx \frac{v_1}{v_2} = -\left[\sin\theta + (2/\pi) \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{0,5(n-1)}}{n(n+2)} (r_0/r)^n P_n^1(\cos\theta)\right] \times$$

$$\times \left[(2/\pi) \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{0,5(n-1)}}{n(n+2)} (r_0/r)^{n+2} P_n^1(\cos\theta)\right]^{-1}. \tag{5-7}$$

Рассматривая поле на большом удалении от отверстия ($r \gg r_0$), можно отбросить все члены ряда, кроме первого, тогда

$$Э_0^{\text{п}\,(1)} \approx [1 - (2/3\pi)(r_0/r)^3]\,[(2/3\pi)(r_0/r)^3]^{-1}, \quad r \gg r_0.$$

Рис. 5-2. Дипольный характер поля в полости за пластиной с круглым отверстием



Можно заключить, что отверстие действует как диполь, расположенный в центре отверстия, с осью, параллельной направлению напряженности исходного поля и лежащей в плоскости, совпадающей с поверхностью экрана. Момент диполя пропорционален радиусу отверстия r_0 в третьей степени. На рис. 5-2 показан этот диполь для внутреннего поля. Для внешнего поля обратного действия необходимо взять эквивалентный диполь с моментом противоположного знака.

Сфера с круглым отверстием. Рассмотрим напряженность магнитного поля внутри сферической оболочки с отверстием радиуса r_0. Граничным условием на внутренней поверхности оболочки будет равенство нулю нормальной составляющей напряженности поля, что соответствует режиму высокой частоты, при которой поле полностью вытесняется из металла. Рассчитаем как приближение к решению поставленной задачи напряженность поля магнитного диполя, расположенного на расстоянии $b < R$ от центра сферы (рис. 5-3, *а*). Потенциал диполя

$$v^{(0)} = \left[r_0^3\mathbf{H}^{(0)}/(3\pi)\right]\left(\sin\varphi\sin\theta/r^2\right). \tag{5-8}$$

В этом выражении напряженность $\mathbf{H}^{(0)}$ равна напряженности магнитного поля на внешней поверхности сферы в месте расположения отверстия, если бы оно отсутствовало. Момент в данном случае равен лишь половине момента, определенного для $R_2 \to \infty$ (плоская плита). Действие экрана будет эквивалентным действию зеркально отображенного диполя, который, очевидно, окажется той же величины и будет расположен на том же расстоянии от экрана, что и данный, но снаружи. Если теперь $R_2 \to \infty$, то в отверстии окажется двойной диполь, так как оба диполя (данный и его зеркальное отображение) сольются.

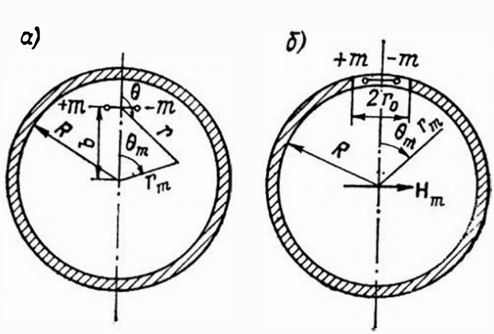


Рис. 5-3. Сфера с круглым отверстием

Введем новые полярные координаты (r_m, θ_m) с началом в центре сферы. В этих новых координатах потенциал диполя будет

$$v^{(0)} = -\mathbf{M}\sin\varphi \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \left(b^{n-1}/r_m^{n+1}\right) P_n^{(1)}(\cos\theta_m). \tag{5-9}$$

Результирующий потенциал для внутренности сферы примет вид

$$v_2 = v^{(0)} - \mathbf{M}\sin\varphi \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)\left(b_2^{n-1} r_m^n / R^{2n+1}\right) P_n^{(1)}(\cos\theta). \tag{5-10}$$

Напряженность магнитного поля в центре сферы имеет направление, указанное на рис. 5-3, *б*, и определяется в виде

$$\mathbf{H}_m = (1/\pi)(r_0/R)^3\, \mathbf{H}^{(0)}. \tag{5-11}$$

Напряженность в данном случае получается в 1,5 раза бóльшей, чем для плоского экрана на том же расстоянии R от отверстия.

Эффективность экранирования сферическим экраном с круглым отверстием

$$Э_0^{c\,(1)} \approx \frac{v_1}{v_2} = r\left[\sin\theta + (2r_0/\pi)\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{0.5(n-1)}}{n(n+2)}(r_0/r)^{n-1} P_n^{(1)}(\cos\theta)\right]\times$$

$$\times\left\{(r_0/r)^2\,[r_0/(3\pi)]\sin\theta - [r_0^3/(3\pi)]\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)\frac{b_2^{n-1} r_m^n}{R^{2n+1}} P_n^{(1)}(\cos\theta)\right\}^{-1}. \tag{5-12}$$

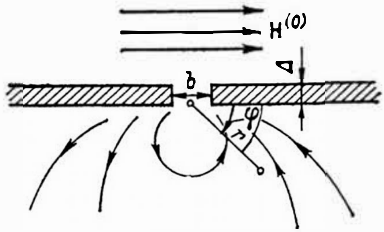
Рассматривая напряженность поля на большом удалении от отверстия $(r \gg r_0)$, можно отбросить все члены ряда, кроме первого:

$$Э_0^{c\,(1)} = \frac{1 - [2/(3\pi)]\,p_0}{[1/(3\pi)]\,p_0^3 - [2/(3\pi)]\left(r_m r^2/R^3\right) p_0^3}, \tag{5-13}$$

где $p = r_0/r$.

Оболочки со щелями. Известно, что экранирующая способность замкнутых экранов зависит от степени проявления поверхностного эффекта и увеличивается при возрастании частоты. Однако при очень высоких частотах это не подтверждается. Повышая частоту, можно дойти до такого предела, при котором экранирующий эффект начнет уменьшаться. Происходит это потому, что стенки экрана не всегда однородны, как это предполагается при расчете. Конструкция экрана всегда состоит из отдельных частей, в местах соединения которых остаются стыки и даже щели, сквозь которые поле может проникать в экранируемое пространство. Результаты исследований влияния стыков и щелей неоднократно публиковались, например в работе [10]. Рассматривались обычно экраны со щелями и бес-

Рис. 5-4. Плоская пластина со щелью в продольном магнитном поле



конечно тонкими стенками. В исследованиях было показано, что влияние стенки экрана, даже незначительной, но конечной толщины, существенно уменьшало проникновение поля сквозь щель.

В дальнейшем при рассмотрении будем полагать, что стенки экрана имеют произвольную конечную толщину. Расчеты напряженности поля будем строить так, чтобы учесть проникновение магнитных линий внутрь металла, — явление, которое будет тем более заметно, чем у́же окажется щель в экране.

Плоская пластина со щелью. Рассмотрим электромагнитное поле напряженностью $\mathbf{H}^{(0)}$, направленной параллельно плоской пластине со щелью шириной b (рис. 5-4). Поле, проникающее внутрь экрана, можно представить как поле, возбужденное линейным магнитным диполем, расположенным в середине щели. Ось этого диполя должна быть направлена параллельно напряженности $\mathbf{H}^{(0)}$. При расчете необходимо учитывать, что переменное поле проникает сквозь поверхность экрана. Считаем щель достаточно узкой: $b \leqslant \Delta$, где Δ — толщина пластины. В полярных координатах (r, φ), представленных на рис. 5-4, скалярный магнитный потенциал поля за пределами экрана будет [10]

$$v = \left(\frac{2b}{\pi}\right)^2 \left[1 + (1-i)\left(2 + \pi + \frac{\pi\Delta}{b}\right)(\delta/b)\right] \times$$
$$\times \exp\left[-\left(\frac{\pi\Delta}{b} + 2\right)\right] \mathbf{H}^{(0)} \frac{\cos\varphi}{r}. \qquad (5\text{-}14)$$

Фактическая глубина проникновения поля в металлическую стенку экрана, описываемая введенным дополнительным членом, пропорциональна эквивалентной глубине проникновения и характеризуется углом фазового сдвига, равным $-\pi/4$. Для предельного случая — бесконечно большой частоты $(\delta \to 0)$, глубина проникновения стремится к нулю.

Напряженность магнитного поля во внутреннем пространстве, рассчитанная по формуле (5-14) с учетом $\mathbf{H} = \operatorname{grad} v$,

$$\mathbf{H} = \left(\frac{2b}{\pi r}\right)^2 \left[1 + (1-i)\left(2 + \pi + \frac{\pi\Delta}{b}\right)\left(\frac{\delta}{b}\right)\right] \mathbf{H}^{(0)} \exp\left[-\left(\frac{\pi\Delta}{b} + 2\right)\right]. \qquad (5\text{-}15)$$

Она убывает обратно пропорционально квадрату расстояния r от щели. Эффективность экранирования плоской пластиной со щелью в виде

$$Э_{\parallel}^{п\,(1)}(r) = \frac{\mathbf{H}^{(0)}}{\mathbf{H}} - \left\{ \left(\frac{2b}{\pi r} \right)^2 \left[1 + (1 - i) \left(2 + \pi + \frac{\pi\Delta}{b} \right) \left(\frac{\delta}{b} \right) \right] \times \right.$$

$$\left. \times \exp \left[- \left(\frac{\pi\Delta}{b} + 2 \right) \right] \right\}^{-1}. \qquad (5\text{-}16)$$

Из этой формулы следует, что эффективность экранирования в этом случае зависит от расстояния исследуемой точки до щели. Кроме того, эффективность экранирования в ней в большей мере определяется соотношением размеров щели b/Δ. Когда $b \gg \Delta$, можно представить скалярные магнитные потенциалы полей для внешнего пространства, в щели и в экранированном пространстве в виде бесконечных рядов [10]. Из них следует, что магнитная напряженность в средней точке щели равна половине напряженности $\mathbf{H}^{(0)}$ исходного поля. Эффективность экранирования на большом расстоянии от щели ($r \gg \gg 0{,}5b$) может быть представлена зависимостью

$$Э_{\parallel}^{п\,(1)}(r \to \infty) \approx 16r^2/b^2. \qquad (5\text{-}17)$$

Как и в случае (5-16), эффективность экранирования возрастает пропорционально квадрату расстояния до исследуемой точки. Необходимо отметить, что представленные результаты получены на основании метода конформных преобразований. Если поле напряженностью $\mathbf{H}^{(0)}$ направлено перпендикулярно плоской пластине со щелью, то вместо выражения (5-16) получим

$$Э_{\perp}^{п\,(1)}(r) = [\pi r/(2b)]^2 \exp[(\pi\Delta/b) + 2]. \qquad (5\text{-}18)$$

В заключение следует отметить [10]:

поле, проникающее в экранированное пространство, подобно полю линейного диполя, расположенного в щели, поэтому скалярный потенциал поля убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от щели;

значение напряженности поля в экранированном пространстве в большой мере зависит от размеров щели, ее ширины b и глубины Δ;

проникновение напряженности поля сквозь поверхность металлического экрана действует как кажущееся увеличение ширины щели; это явление особенно сильно проявляется при узких щелях.

Спиральные экраны. Спиральными экранами назовем такие, которые выполняются с нарушением сплошности в виде сеток из металлических полос или прядей круглых проволок. Как правило, используются хорошо проводящие немагнитные материалы. Такие экраны целесообразно рассматривать на упрощенной модели, с продольными щелями или со спиральным швом. Эффективность экранирования спиральными экранами можно получить, используя граничные условия [11]:

$$Э^{сп\,(1)} = 1 + [\chi(S_с + S_щ)]^{-1}, \qquad (5\text{-}19)$$

где $S_с = 1 + 0{,}25k(R_1 + r_1)[\pi r_1/(2a)]^{0{,}5}$ — параметр, характеризующий эффект отражения в эквивалентном сплошном экране; $S_щ = 2[l/(\pi R_1)]\ln[(a/r_1)(1 + kR_1)]$ — параметр, характеризующий эффект прохождения энергии через щели; $\chi = [2I_1(2\pi R_1/h) \times K_1(2\pi R_1/h)]^{-1}$ — фактор спиральности экрана; $k = (i\omega\mu\gamma)^{0{,}5}$ — волновое число; I_1, K_1 — модифицированные цилиндрические функции; R_1 и r_1 — радиусы экрана и проволок; a — расстояние между проволоками; l — ширина щели; h — шаг спиральности.

Эффективность экранирования спиральным экраном в значительной степени зависит от шага спиральности h и с его ростом ($h \to \infty$) стремится к эффективности экранирования сплошным цилиндрическим экраном.

Сетчатые и решетчатые оболочки.

Плоские оболочки. Такие оболочки распространены в инженерной практике, особенно в зоне экранирования электромагнитных полей высоких частот. Рассмотрим экраны из двух рядов стержней (рис. 5-5), расположенных друг от друга на расстояниях a и ограничивающих экранируемое пространство шириной b. Предполагается, что магнитная напряженность $\mathbf{H}^{(0)}$ внешнего поля направлена перпендикулярно оси проволок. В проволоках наводятся токи $\mathbf{I}$, направленные в обоих рядах противоположно, так как удаленные концы проволок одного ряда предполагаются соединенными с проволоками другого и, следовательно, проволоки охватывают экранируемое пространство, как короткозамкнутые витки. Наведенные токи возбуждают вторичное поле, ослабляющее в экранируемом пространстве внешнее электромагнитное поле.

Если решетки, изображенные на рис. 5-5, разместить взаимно перпендикулярно (рис. 5-6), то полученная структура является хорошим приближением равномерной сетки из двух взаимно перпендикулярных рядов проволок. Эквивалентность такой замены можно объяснить тем, что проволоки, расположенные параллельно полю, не играют существенной роли в экранирующем действии, так как наводящиеся в них вихревые токи имеют ничтожное внешнее поле.

Расположим систему коор-

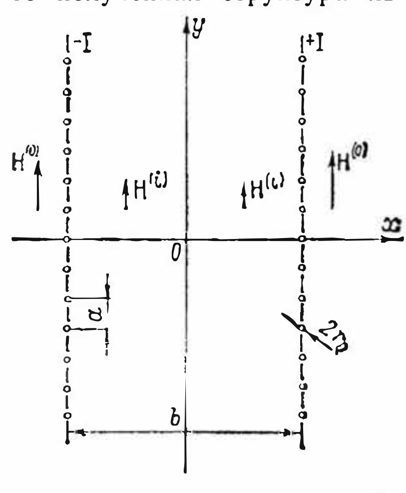


Рис. 5-5. Решетчатый экран из двух рядов параллельных стержней

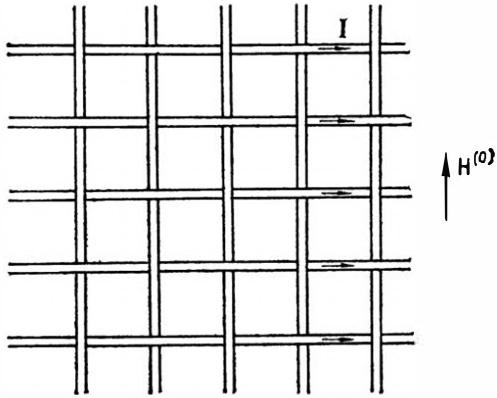


Рис. 5-6. Сетчатая цилиндрическая оболочка

динат (x, y), как показано на рис. 5-5, с началом в средней точке между рядами проволок. Ось x пусть проходит через центры сечения двух противоположно лежащих проволок, радиус сечения которых равен r_0. Ось y направим параллельно напряженности $\mathbf{H}^{(0)}$ поля. При расчете используется метод комплексных потенциалов. Функция экранирования такой системы представляется в виде

$$Э_{\text{ст}}^{\text{п}\,(1)} = \frac{i\omega\mu_0\,(b/a) + R_i}{(i\omega\mu_0/\pi)\ln\left[a/(2\pi r_i)\right] + R_i}, \tag{5-20}$$

где

$$R_i = \frac{2\rho_1}{\pi\gamma r_i^2} + i\,\frac{\omega\mu_0}{\pi}\,\lambda_1 \approx \begin{cases} R_0 = 2/(\pi\gamma r_i^2), & r_i < \delta; \\ (1+i)/(\pi\gamma\delta r_i), & r_i > \delta \end{cases} \tag{5-21}$$

— внутреннее комплексное сопротивление прямого и обратного проводов витка единичной длины; R_0 — сопротивление постоянному току прямого и обратного проводов витка единичной длины;

$$\rho_1 = \operatorname{Re}\left[\frac{k_i r_i}{2}\,\frac{I_0(k_i r_i)}{I_1(k_i r_i)}\right] \approx \begin{cases} 1, & r_i = \delta_i; \\ 0{,}5\,(r_i/\delta_i) + 0{,}25, & r_i > \delta_i \end{cases}$$

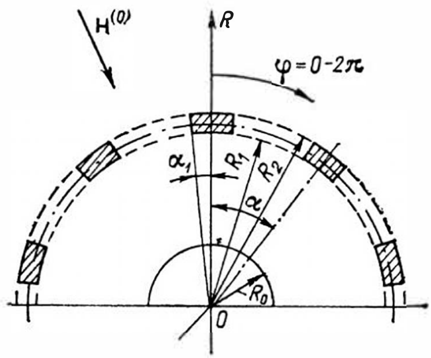
— функция поверхностного сопротивления;

$$\lambda_1 = -\operatorname{Re}\left[\frac{(k_i r_i)^2}{2}\,\frac{I_2(k_i r_i)}{I_0(k_i r_i)}\right] \approx \begin{cases} 0{,}25, & r_i < \delta_i; \\ \delta_i/(2r_i), & r_i > \delta_i \end{cases}$$

— функция поверхностной индуктивности.

О комплексном сопротивлении проводов R_i можно заметить, что при низких частотах (отсутствует поверхностный эффект — $r_i < \delta$) стержневой экран можно считать эквивалентным экрану со сплошными стенками толщиной $d = 2r_i$ с проводимостью, уменьшенной пропорционально коэффициенту

Рис. 5-7. Стержневая цилиндрическая оболочка



заполнения стенки стержневого экрана проволокой, равному $\pi r_i/(2a)$.

Цилиндрические стержневые оболочки. В электротехнических устройствах, в частности в электрических машинах, функции электромагнитных экранов либо демпферных систем выполняют структуры электропроводных стержней, которые на концах замкнуты проводящими кольцами (рис. 5-7). Электромагнитное поле с однородной напряженностью $\mathbf{H}^{(0)}$ приложено на поверхности $r = R_0$ по радиусу. Считается, что активное сопротивление стержней значительно превосходит сопротивление короткозамкнутых колец. Эффективность экранирования $Э_{ст}^{ц(1)}$ определяется формулой (1-80) на радиусе $r \gg R_2$. Результаты получены экспериментально [22], некоторые из них приведены в табл. 5-1.

Таблица 5-1

Номер варианта	Исходные данные	$Э_{ст}^{ц(1)}$	Номер варианта	Исходные данные	$Э_{ст}^{ц(1)}$
1 (при $S = \mathrm{const}$)	$n = 120$ $n = 32$ $n = 20$ $n = 10$	62 62 53 27	3 (при $n = 32 = \mathrm{const}$)	γ_1 $\gamma_2 = 2\gamma_1$	127 1,92
			4 (при $n = 32 = \mathrm{const}$)	Δ_1 $\Delta_2 = 0{,}5\Delta_1$,	112 2,64
2 (при $n = 32 = \mathrm{const}$)	S_1 $S_2 = 0{,}5S_1$ $S_3 = 0{,}25S_1$	134 31 15,6	5 (при $n = 32 = \mathrm{const}$)	$R^{(1)}$ $R^{(2)} = 0{,}5R^{(1)}$	43 83

При увеличении числа стержней n при $\alpha_1 = \alpha/4$ (вариант 1) $Э_{ст}^{ц(1)}$ растет. При увеличении n более 120 эффективность экранирования практически не изменяется. Она определяется коэффициентом заполнения меди $k_м$, равным отношению объема меди к объему сплошной оболочки, внутренний и внешний радиусы которой R_1 и R_2. При $n = 120$ коэффициент $k_м = 0{,}5$, $Э_{ст}^{ц(1)} \approx 0{,}45Э^{ц(1)}$, где $Э^{ц(1)}$ — эффективность экранирования сплошной проводящей цилиндрической оболочкой. Уменьшение толщины стержня при $n = \mathrm{const}$ влечет за собой уменьшение эффективности экранирования (вариант 2): менялась толщина стержней — $\Delta_1 = R_2 - R_1$, $\Delta_2 = 0{,}5\Delta_1$ и $\Delta_3 = 0{,}25\Delta_1$; это соответствует изменению поперечного сечения S_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$ стержней, соответственно, в два и в четыре раза — S_1, $S_2 = 0{,}5S_1$ и $S_3 = 0{,}25S_1$. С ростом электрической проводимости γ_i $(i = 1,\ 2)$ материала стержней (вариант 3) уменьшается отношение $Э_{\text{ст}}^{ц(1)}/Э^{ц(1)}$, что свидетельствует об уменьшении эффективности экранов. Экономически выгодно заменять системой короткозамкнутых стержней только те сплошные оболочки, которые выполнены из плохо проводящих материалов (например, сталь), т. е. лишь в этом случае уменьшение массы экрана влечет за собой не столь существенное уменьшение эффективности его экранирования $Э_{\text{ст}}^{ц(1)}$. Учитывая зависимость $Э_{\text{ст}}^{ц(1)}$ от толщины стержней Δ_i $(i = 1,\ 2)$ (вариант 4) и от радиуса $R^{(i)} = (R_1 + R_2)/2$, на котором размещаются стержни (вариант 5), можно утверждать, что эффективность замены сплошных экранов короткозамкнутыми стержнями заметно ухудшается с увеличением заданной эффективности экранирования. С уменьшением числа стержней увеличивается неравномерность распределения напряженности магнитного поля вблизи экрана.

В результате проведенного исследования могут быть сделаны выводы:

1) замена сплошных цилиндрических экранов из материалов с высокой проводимостью γ, обеспечивающих $Э^{ц(1)} > 25$, системой короткозамкнутых стержней является неэффективной, так как при этом коэффициент $k_{\text{м}}$ будет меньше относительного снижения эффективности экранирования $\left(Э_{\text{ст}}^{ц(1)}/Э^{ц(1)}\right)$, вызванного такой заменой;

2) для экрана в виде стержней существует число стержней n, превышение которого не увеличивает эффективности экранирования $Э_{\text{ст}}^{ц(1)}$, определяемой на достаточном расстоянии от внешней поверхности стержней, где геометрия стержней не влияет на характер распределения напряженности поля; рост числа стержней лишь уменьшает это расстояние и сглаживает неравномерное распределение напряженности поля на поверхности экрана;

3) уменьшение линейного размера в продольном направлении стержней приводит к снижению эффективности экранирования и увеличению неравномерности распределения напряженности поля, а также области, где эта неравномерность имеет место;

4) при выборе конструкции экранирующих устройств в электротехнических устройствах необходимо учитывать, что применение короткозамкнутых стержней обусловливает появление областей с $Э_{\text{ст}}^{ц(1)} < 1$; размеры этих областей зависят от вида применяемых стержней и определяются в результате утонченного электромагнитного расчета.

Металлические оболочки со стыками. Экран конструируется обычно из отдельных элементов, так что в его стенках всегда будут находиться стыки, в которых возможны зазоры.

Электромагнитный эффект экранирующей металлической оболочки обусловлен действием токов, наведенных в стенках оболочки помехонесущим электромагнитным полем. Эти токи возбуждают поле, которое, взаимодействуя с помехонесущим полем в стенках оболочки, ослабляет его действие. Наведенные в экране токи протекают в плоскостях, перпендикулярных направлению напряженности поля. Если известно направление напряженности поля, то стыки следует располагать так, чтобы их направление было параллельным линиям наведенных токов и, следовательно, не влияло на их значение. На рис. 5-8 и 5-9 показано направление токов, наведенных в оболочках, при магнитных полях напряженностью $\mathbf{H}^{(0)}$, направленной перпендикулярно или параллельно стыкам. На рис. 5-9 показаны обо-

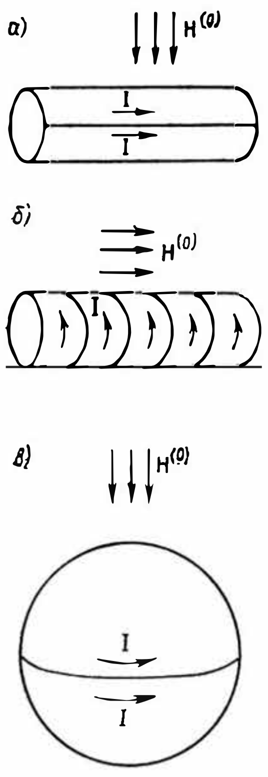


Рис. 5-8. Металлические оболочки со стыками, перпендикулярными направлению магнитного поля

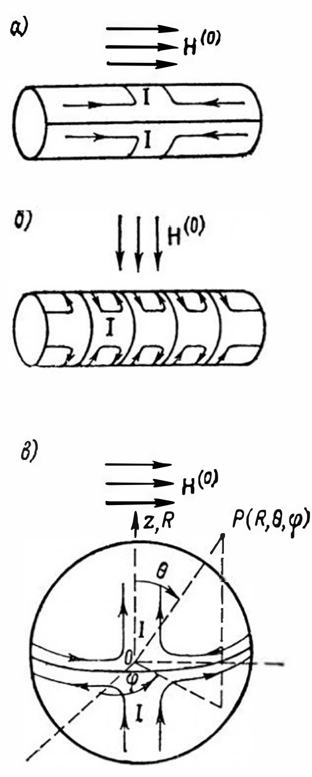


Рис. 5-9. Металлические оболочки со стыками, параллельными направлению магнитного поля

лочки экранов, в которых вихревым токам приходится огибать стыки, вследствие чего эти токи ослабляются. Такие случаи могут встречаться и на практике, если неизвестно направление напряженности поля или это направление меняется. Экраны, показанные на рис. 5-8 и 5-9, представляют собой хорошее приближение к задачам практики. На рис. 5-9, *а* представлен цилиндрический экран, применяемый для экранирования катушек с токами. Такой экран изготовляется из согнутого листового материала со стыком, расположенным параллельно направлению напряженности поля. Вихревые токи в данном случае должны огибать стык и замыкаться вдоль края стенки. На рис. 5-9, *б* показан цилиндрический экран, составленный из отдельных коротких цилиндрических секций. Он также является подобием кабельного экрана из одной или нескольких лент, навитых с коротким шагом витка. При направлении напряженности поля, показанном на рис. 5-9, *б*, вихревым токам приходится огибать стыки и замыкаться вдоль краев отдельных секций.

Следует рассмотреть вопрос о том, в какой мере стыки препятствуют протеканию возбужденных вихревых токов. Иногда даже при тщательной подгонке отдельных частей экрана друг к другу экран в целом нельзя рассматривать как однородный, так как поверхность металла в стыках может быть загрязненной или окисленной. В дальнейшем будем рассматривать стык как сосредоточенное сопротивление для перпендикулярно направленного вихревого тока. Для решения поставленной задачи можно использовать разработанную в § 3-1 методику расчета толстостенных оболочек. Отличие состоит в использовании условия, которое заключается в том, что токи, наведенные в стенках экрана, не могут проходить через стык. Математически это условие сводится к требованию, чтобы вдоль всего стыка составляющие плотности тока и напряженности электрического поля, нормальные к направлению стыка, обращались в нуль.

Дополнительно предполагается, что толщина стенок экрана значительно меньше его габаритных размеров. Так как на внешней и внутренней поверхностях стенок экрана радиальная составляющая электрической напряженности поля равна нулю, то она равна нулю и в объеме стенок экрана.

Круговой цилиндрический экран.

1. Стыки продольные. Рассмотрим цилиндрический экран среднего радиуса R_1 с толщиной стенки Δ_1, защищающей внутреннее пространство от поля с однородной магнитной напряженностью $\mathbf{H}^{(0)}$, направленной параллельно образующей цилиндра (рис. 5-9, *а*), и которая имеет один или несколько аксиально направленных стыков. В цилиндре возбуждаются вихревые токи $\mathbf{I}$, замыкающиеся по путям, изображенным на рис. 5-8, *а*. Введем цилиндрические координаты (r, φ, z); начало координат $z = 0$ расположим в средней точке оси. Для того чтобы в рас-

четах можно было считать оболочку бесконечно длинной, положим z ме́ньшим половины длины оболочки.

После расчетов напряженности магнитных полей во внешней к экрану области, в стенках экрана и во внутреннем пространстве, использования граничных условий (1-17) и (1-18) получим систему бесконечных алгебраических уравнений [10]:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=1,3,\ldots} K_{0,n} A_{0,n}\left[A_n^* \exp(k_n\Delta_1) - B_n^* \exp(-k_n\Delta_1)\right] = \mathbf{H}^{(0)}, \\ &\sum_{n=1,3,\ldots} A_{0,n}\left[(1-K_{0,n}) A_n^* + (1+K_{0,n}) B_n^*\right] = 0, \end{aligned}\right\} m=0; \tag{5-22}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=1,3,\ldots} A_{m,n}\left[(1+K_{m,n}) A_n^* \exp(k_n\Delta_1) + \right. \\ &\qquad \left. + (1-K_{m,n}) B_n^* \exp(-k_n\Delta_1)\right] = 0, \\ &\sum_{n=1,3,\ldots} A_{m,n}\left[(1-K_{m,n}) A_n^* + (1+K_{m,n}) B_n^*\right] = 0, \end{aligned}\right\} m=2,\ 4,\ \ldots, \tag{5-23}$$

где

$$A_n^* = -2A_n \exp(k_n R_1)/(i\omega\mu_0 R_1); \quad B_n^* = -2B_n \exp(-k_n R_1)/(i\omega\mu_0 R_1);$$

$$A_{m,n} = \begin{cases} 2/(\pi n), & m=0 \\ \dfrac{4n}{\pi(n^2-m^2)}, & m=2,\ 4,\ \ldots \end{cases} \text{— коэффициенты Фурье;}$$

$$K_{m,n} = \begin{cases} \nu_{0,1}(k_n R_1/2), & m=0; \\ \nu_{0,1}[2k_n R_1/(mp)], & m=2,\ 4,\ \ldots; \end{cases}$$

$\nu_{0,1} = \mu_0/\mu_1$; p — число стыков; $k_n = \{k^2 + [np/(2R_1)]^2\}^{0,5}$; $k^2 = i\omega\mu\gamma$.

Для нахождения постоянных интегрирования A_n и B_n прибегнем к приближенному решению уравнений (5-22) и (5-23). Практический интерес представляет условие $|k|R_1 \gg 1$ для получения значительной эффективности экранирования. Положим $|k|R \to \infty$, что соответствует большим значениям частоты, электрической проводимости или обеих этих величин. Тогда $k_n = k$ и уравнения (5-22) и (5-23) примут вид:

$$\left.\begin{aligned} &K_0 \exp(k\Delta_1)\,\alpha_0 - K_0 \exp(-k\Delta_1)\,\beta_0 = \mathbf{H}^{(0)}, \\ &(1-K_0)\,\alpha_0 + (1+K_0)\,\beta_0 = 0, \end{aligned}\right\} m=0; \tag{5-24}$$

$$\left.\begin{aligned} &(1+K_m)\exp(k\Delta_1)\,\alpha_m + (1-K_m)\exp(-k\Delta_1)\,\beta_m = 0, \\ &(1-K_m)\,\alpha_m + (1+K_m)\,\beta_m = 0, \end{aligned}\right\} m=2,\ 4,\ \ldots, \tag{5-25}$$

где

$$\alpha_m = \sum_{n=1,3,\ldots} A_{m,n} A_n^*; \quad \beta_m = \sum_{n=1,3,\ldots} A_{m,n} B_n^*. \tag{5-26}$$

Из уравнений (5-25) следует, что $\alpha_m = \beta_m = 0$, $m = 2,\ 4,\ \ldots$

Для однородного поля напряженностью $\mathbf{H}^{(0)}$ ($m=0$) из уравнений (5-24) получим

$$\alpha_0 = \frac{\left(1+K_0^{-1}\right)\left(\mathbf{H}^{(0)}/2\right)}{\operatorname{ch}(k\Delta_1) + K_0 \operatorname{sh}(k\Delta_1)}; \quad \beta_0 = \frac{\left(1-K_0^{-1}\right)\left(\mathbf{H}^{(0)}/2\right)}{\operatorname{ch}(k\Delta_1) + K_0 \operatorname{sh}(k\Delta_1)}. \tag{5-27}$$

И, наконец, напряженность поля во внутреннем пространстве

$$\mathbf{H}^{(i)} = \mathbf{H}^{(0)} [\operatorname{ch}(k\Delta_1) + K_0 \operatorname{sh}(k\Delta_1)]^{-1}, \tag{5-28}$$

откуда

$$Э_{\|}^{ц\,(1)} = \operatorname{ch}(k\Delta_1) + K_0 \operatorname{sh}(k\Delta_1), \tag{5-29}$$

что соответствует формуле (3-88) для экрана без стыка. Таким образом, получено, что при возрастании частоты (или проводимости) влияние стыков становится незаметным, а при $|k|R \to \infty$ совсем исчезает. Результат (5-29) можно считать первым приближением. Для получения решения при больших $|k|R \gg 1$, но конечных, необходимо разложить k_n в ряд с удержанием двух первых членов (второе приближение):

$$k_n = [k^2 + (np/2R_1)^2]^{0,5} \approx k\{1 + 0{,}5\,[np/(2kR_1)]^2\}. \tag{5-30}$$

Разложение (5-30) при достаточно большом значении переменной суммирования непригодно. Верхнюю границу N этой переменной определим, приравняв второй член суммы в формуле (5-30) первому, потому что разложение (5-30) будет сходящимся до членов с $n = N$. Тогда

$$[N] = 2\,|k|\,R/p, \tag{5-31}$$

где N — наибольшее нечетное число, равное или меньшее величины, стоящей справа в (5-31). На этом основании вместо бесконечной системы уравнений (5-22) — (5-23) рассмотрим систему, содержащую лишь $N + 1$ уравнений со столькими же неизвестными A_n^* и B_n^*. Для дальнейшего расчета введем величины δA_n и δB_n, тогда

$$A_n^* = A_n^{*(0)} + \delta A_n; \qquad B_n^* = B_n^{*(0)} + \delta B_n, \tag{5-32}$$

где $A_n^{*(0)} = (4/\pi)(\alpha_0/n)$; $B_n^{*(0)} = (4/\pi)(\beta_0/n)$ — постоянные интегрирования, использованные для первого приближения.

Введем измененные величины A_n^* и B_n^* в уравнения (5-22) и (5-23), где в показательных функциях и постоянных $K_{m,n}$ учтем малые величины $np/(2kR)$ из формулы (5-30). Пренебрегая членами, содержащими произведения малых величин, получим систему линейных уравнений с неизвестными $\delta\alpha_m$ и $\delta\beta_m$:

$$\left.\begin{aligned} &\exp(k\Delta_1)\,\delta\alpha_0 - \exp(-k\Delta_1)\,\delta\beta_0 = \{\operatorname{sh}(k\Delta_1) + K_0^{-1}\operatorname{ch}(k\Delta_1) + \\ &\quad + k\Delta_1\,[\operatorname{ch}(k\Delta_1) + (k\Delta_1)^{-1}\operatorname{sh}(k\Delta_1)]\}\,h_0, \\ &(1 - K_0)\,\delta\alpha_0 + (1 + K_0)\,\delta\beta_0 = -h_0, \end{aligned}\right\}\ m = 0;$$

$$\left.\begin{aligned} &(1 + K_m)\exp(k\Delta_1)\,\delta\alpha_m + (1 - K_m)\exp(-k\Delta_1)\,\delta\beta_m = \\ &\quad = \{K_m\,[\operatorname{sh}(k\Delta_1) + K_0^{-1}\operatorname{ch}(k\Delta_1)] + \\ &\quad + k\Delta_1\,[(K_m + K_0^{-1})\operatorname{ch}(k\Delta_1) + \\ &\quad + (K_m K_0^{-1} + 1)\operatorname{sh}(k\Delta_1)]\}\,h_m, \\ &(1 - K_m)\,\delta\alpha_m + (1 - K_m)\,\delta\beta_m = -(K_m/K_0)\,h_m, \end{aligned}\right\}\ m = 2, 4, \ldots, \tag{5-33}$$

где

$$\delta\alpha_m = \sum_{n=1,3,\ldots}^{N} \alpha_{m,n}\,\delta A_n; \quad \delta\beta_m = \sum_{n=1,3,\ldots}^{N} \alpha_{m,n}\,\delta B_n; \qquad (5\text{-}34)$$

$$h_m = -(2/\pi)\,[p^2/(2kR_1)^2]\,\mathbf{H}^{(i)} \sum_{n=1,3,\ldots}^{N} \alpha_{m,n} n. \qquad (5\text{-}35)$$

В формулах (5-34) и (5-35) вычислим суммы приближенно, полагая N большим. Подставляя значение $A_{m,n}$ из формул (5-23), применяя формулу суммирования Эйлера

$$\sum_{n=1,3,\ldots}^{N} n^2/(n^2 - m^2) \approx 0{,}5\,\{1 - (m/2N)\ln[(N+m)/(N-m)]\}, \quad m = 0,\ 2,\ \ldots,\ N-1 \qquad (5\text{-}36)$$

и подставляя N из формулы (5-31), получим

$$h_m = \begin{cases} \dfrac{ip\mathbf{H}^{(i)}}{\pi^2|k|R_1}, & m = 0; \\ \dfrac{2ip\mathbf{H}^{(i)}}{\pi^2|k|R_1}\left(1 - \dfrac{m}{2N}\ln\dfrac{N+m}{N-m}\right), & m = 2,\ 4,\ \ldots,\ N-1. \end{cases} \qquad (5\text{-}37)$$

Разрешая систему уравнений (5-32) и (5-33) с учетом (5-34) — (5-37), получим для однородной части поля во внутреннем пространстве

$$D_0 = \mathbf{H}^{(i)} + \frac{\mathrm{sh}(k\Delta_1) + k\Delta_1\left[\mathrm{ch}(k\Delta_1) + K_0^{-1}\,\mathrm{sh}(k\Delta_1)\right]}{\mathrm{ch}(k\Delta_1) + K_0\,\mathrm{sh}(k\Delta_1)} K_0 h_0. \qquad (5\text{-}38)$$

Дополнительную составляющую напряженности магнитного поля рассчитывают из

$$[4/(mp)]\,D_m R_1^{0{,}5mp} = \delta\alpha_m\,\delta\beta_m = \{(K_m - K_0^{-1})\,\mathrm{sh}(k\Delta_1) + k\Delta_1\left[(K_m + K_0^{-1})\,\mathrm{ch}(k\Delta_1) + (K_m K_0^{-1} + 1)\,\mathrm{sh}(k\Delta_1)\right](h_m/2)\}/\left[\mathrm{ch}(k\Delta_1) + 0{,}5\,(K_m + K_m^{-1})\,\mathrm{sh}(k\Delta_1)\right] \approx$$

$$\approx \begin{cases} 2h_m, & |k\Delta_1| < 1,\ K_m \gg 1; \\ (1 + k\Delta_1)\,h_m, & |k\Delta_1| > 1,\ K_m \gg 1; \\ [K_m/(3K_0)]\,(k\Delta_1)^2\,h_m, & |k\Delta_1| < 1,\ K_0 \ll 1; \\ (K_m/K_0)\,(k\Delta_1 - 1)\,h_m, & |k\Delta_1| > 1,\ K_0 \ll 1. \end{cases} \qquad (5\text{-}39)$$

В формулах (5-39) заключаются четыре приближенных выражения. Обе верхние формулы выведены для немагнитных экранов ($K_m \gg 1$). Две последние формулы даны для ферромагнитных экранов. При низких частотах, когда отсутствует поверхностный эффект ($|kd| < 1$), оказывается, что значение D_m для немагнитных экранов значительно больше, чем для ферромагнитных. Это означает, что стыки в ферромагнитных экранах меньше влияют на эффективность экранирования, так как силовые линии поля параллельны стыкам, а экранирующий эффект магнитного экрана обусловлен коротким замыканием магнитного потока в экране. Так же и при поверхностном эффекте ($|kd| > 1$), т. е. при высокой частоте, коэффициент D_m у немагнитных экранов больше, чем у ферромагнитных, и поэтому ферромагнитные экраны надежнее подавляют напряженность поля, проходящего сквозь зазор в стыке, чем другие экраны с аналогичными зазорами.

Определив постоянные интегрирования, рассмотрим, как можно оценить эффективность экранирования цилиндром с продольными стыками. Поскольку напряженность поля внутри экрана является в этом случае неоднородной, то удобнее пользоваться коэффициентом экранирования, найденным по формуле (1-70).

Скалярный потенциал поля и составляющие напряженности магнитного поля внутри экрана представляются в виде [10]

$$v = z \sum_{m=0,\,2,\,\ldots} D_m r^{0,5mp} \cos(0,5mp\varphi);$$

$$\mathbf{H}_r^{(i)} = (z/r) \sum_{m=0,\,2,\,\ldots} (0,5mp)\, D_m r^{0,5mp} \cos(0,5mp\varphi); \tag{5-40а}$$

$$\mathbf{H}_z^{(i)} = \sum_{m=0,\,2,\,\ldots} D_m r^{0,5mp} \cos(0,5mp\varphi);$$

$$\mathbf{H}_\varphi^{(i)} = -(z/r) \sum_{m=0,\,2,\,\ldots} (mp/2)\, D_m r^{0,5mp} \sin(0,5mp\varphi). \tag{5-40б}$$

В формуле для потенциала v член $D_0 z$ представляет собой составляющую напряженности однородного поля, как следует из выражения (5-38), почти не отличается от составляющей напряженности поля однородного экрана и становится тем меньше, чем больше величина kR. Остальные члены в этой формуле представляют собой составляющие, искажающие поле, возбужденные воздействием стыков. Постоянные D_m, входящие в выражения для этих составляющих, вычисляются по формулам (5-39).

Эффективность экранирования для параллельной составляющей напряженности поля

$$Э_m^{ц\,(1)}(z) = Э^{ц\,(1)} \left\{ \sum_{m=0,\,2,\,\ldots} D'_m r^{0,5mp} \cos(0,5mp\varphi) \right\}^{-1}, \tag{5-41}$$

где $D'_m = D_m/\mathbf{H}^{(i)}$; $Э^{ц\,(1)}$ — эффективность экранирования сплошным цилиндрическим экраном [см. (5-29)].

Формулу (5-41) можно рассматривать как оценочную. Если $p = 0$, то из (5-41) получаем эффективность экранирования однородным экраном, так как член в фигурных скобках равен единице. При наличии стыков появляется потребность в удержании более высоких членов ряда в фигурных скобках. Вследствие этого эффективность экранирования уменьшается.

2. Стыки поперечные. Рассмотрим тонкостенную экранирующую оболочку радиуса R с толщиной стенок $\Delta_1 \ll R$ и поперечными стыками с расстоянием между ними b (рис. 5-9, б). Та-

кая конструкция является хорошим подобием кабельного экранирования, состоящего из одной или нескольких металлических лент шириной b с коротким шагом намотки. После расчетов напряженности магнитных полей во внешней к экрану области, в стенках экрана и во внутреннем пространстве, использования граничных условий (1-17) и (1-18) получим систему бесконечных алгебраических уравнений [10]:

$$\sum_{n=1,3,\ldots} A_{m,n}\left[(1+K_{m,n})A_n^{*}\exp(k_n\Delta_1)+(1-K_{m,n})B_n^{*}\exp(-k_n\Delta_1)\right]=$$

$$=\begin{cases}[2\pi R/(ib)]\,\mathbf{H}^{(0)}, & m=0;\\ 0, & m=2,4,\ldots;\end{cases} \qquad (5\text{-}42\text{а})$$

$$\sum_{n=1,3,\ldots} A_{m,n}\left[(1-K_{m,n})A_n^{*}+(1+K_{m,n})B_n^{*}\right]=0,$$

$$m=0,2,4,\ldots, \qquad (5\text{-}42\text{б})$$

где

$$A_n^{*}=-\left[\pi\exp(k_nR_1)/(\mu_0\omega b)\right]A_n;\quad B_n^{*}=-\left[\pi\exp(-k_nR_1)/(\mu_0\omega b)\right]B_n;$$

$$A_{m,n}=\begin{cases}2/(\pi n), & m=0\\ \{4n/[\pi(n^2-m^2)]\}, & m=2,4,\ldots\end{cases}$$ — коэффициенты Фурье;

$$K_{m,n}=\begin{cases}\nu_{0,1}k_nR_1, & m=0;\\ \nu_{0,1}(k_nR_1/\pi m), & m=2,4,\ldots;\end{cases}\quad k_n=\left[k^2+R_1^{-2}+(\pi n/b)^2\right]^{0,5}.$$

Система уравнений (5-42) может быть решена приближенно, аналогично системам (5-22)—(5-23). Первое приближение получим для бесконечно большой частоты $\omega\,(k\to\infty)$. Напряженность поля во внутреннем пространстве окажется равной напряженности в однородном экране:

$$\mathbf{H}^{(i)}=\mathbf{H}^{(0)}/\left[\operatorname{ch}(k\Delta_1)+0{,}5\left(K_0+K_0^{-1}\right)\operatorname{sh}(k\Delta_1)\right]=D_0, \qquad (5\text{-}43)$$

откуда $Э_{\perp}^{ц(1)}=\operatorname{ch}(k\Delta_1)+0{,}5\left(K_0+K_0^{-1}\right)\operatorname{sh}(k\Delta_1)$, что соответствует формуле (3-75а). Для получения решения при достаточно больших $|k|R_1\gg 1$, но конечных, необходимо разложить k_n в ряд с удержанием двух первых членов (второе приближение):

$$k_n\approx k\left\{1+0{,}5\left[\pi n/(kb)\right]^2\right\}. \qquad (5\text{-}44)$$

Разложение (5-44) при достаточно большом значении переменной суммирования непригодно. Верхнюю границу N этой переменной определим, приравняв второй член суммы в формуле (5-44) первому, потому что разложение (5-44) будет сходящимся лишь до членов с $n=N$. Тогда

$$\{N\}=|k|b/\pi. \qquad (5\text{-}45)$$

В рассматриваемом случае окончательные результаты идентичны соответствующим формулам для продольных стыков с единственной разницей, что в данном случае формулы для однородной составляющей напряженности поля с $m=0$ можно получить из формул с любым значением m.

Скалярный потенциал и составляющие напряженности магнитного поля внутри цилиндра описываются в виде [10]

$$v = D_0 r \sin\varphi + \sin\varphi \sum_{m=2,\,4,\,\ldots} D_m I_1(i\pi m r/b)\cos(\pi m z/b); \quad (5\text{-}46\text{а})$$

$$\mathbf{H}_r = D_0 \sin\varphi + (\sin\varphi/r) \sum_{m=2,\,4,\,\ldots} (i\pi m r/b) D_m I_1'(i\pi m r/b)\cos(\pi m z/b); \quad (5\text{-}46\text{б})$$

$$\mathbf{H}_\varphi = D_0 \cos\varphi + \cos\varphi/r \sum_{m=2,\,4,\,\ldots} D_m I_1(i\pi m r/b)\cos(\pi m z/b) \quad (5\text{-}46\text{в})$$

с неизвестными постоянными D_m. В формуле для потенциала v первый член представляет собой однородное поле напряженности $\mathbf{H}^{(0)}$, а остальные — дополнительное поле неоднородной напряженности. Неоднородное поле имеет по аксиальному направлению z период, равный ширине кольца или соответственно расстоянию между соседними стыками. Эффективность экранирования для перпендикулярной составляющей напряженности магнитного поля

$$Э_m^{ц(1)}(r) = Э_\perp^{ц(1)}\left\{1 + \sum_{m=2,\,4,\,\ldots} (i\pi m r/b) D_m' I_1'(i\pi m r/b)\sin(\pi m z/b)\right\}^{-1}, \quad (5\text{-}47)$$

где $D_m' = D_m/\mathbf{H}^{(i)}$.

Постоянная D_m определится из соотношений

$$(\pi R_1/ib)(D_0 - \mathbf{H}^{(i)}),\ m=0;\ [D_m/(mR_1)]\, I_1'(i\pi m R_1/b),\ m=2,\ 4,\ \ldots \quad (5\text{-}48)$$

Сферическая оболочка из двух половин. Сферическая оболочка является простейшим эквивалентом экрана любой формы конечных линейных размеров. Расчетная схема соответствует рис. 5-9, *в*. Ось z здесь направлена вертикально вверх, угол φ соответствует географической долготе, угол θ — географической широте $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$. Стык находится на «экваторе» $(\theta = \pi/2)$. После расчетов напряженности электромагнитных полей во внешней к экрану области, в стенках экрана и во внутреннем пространстве, использования граничных условий (1-17) и (1-18) получим систему бесконечных алгебраических уравнений [10]:

$$\sum_{n=2,\,4,\,\ldots} b_{m,n}\left[\left(1+\frac{K_n}{m}\right)A_n^*\exp(k_n\Delta_1) + \left(1-\frac{K_n}{m}\right)B_n^*\exp(-k_n\Delta_1)\right] = \begin{cases} 1{,}5\mathbf{H}^{(0)}, & m=1; \\ 0, & m=3,\ 5,\ \ldots; \end{cases} \quad (5\text{-}49\text{а})$$

$$\sum_{n=2,\,4,\,\ldots} b_{m,n}\left[\left(1-\frac{K_n}{1+m}\right)A_n^* + \left(1+\frac{K_n}{1+m}\right)B_n^*\right] = 0,\ m=1,\ 3,\ \ldots, \quad (5\text{-}49\text{б})$$

где

$$A_n^{*} = -A_n \exp(k_n R_1)/(i\omega\mu_0 R_1); \quad B_n^{*} = -B_n \exp(-k_n R_1)/(i\omega\mu_0 R_1);$$

$$K_n = \nu_{0,1} k_n R_1; \quad k_n = [k^2 + n(n+1) R^{-2}]^{0,5};$$

$$b_{m,n} = (-1)^{0,5(m+n+1)} (2m+1) n (n+1) \psi_n \psi_{m-1}/[(m+1)(n-m) \times \times (n+m+1)];$$

$$\psi_n = n!\{2^n [(n/2)!]^2\}, \quad n \to \infty; \quad \psi_n = [2/(\pi n)]^{0,5}.$$

Приближенное решение системы уравнений (5-49) осуществляется так же, как для цилиндрического экрана. При большом k ($k_n \to k$) поле оказывается однородным:

$$-D_1 = \mathbf{H}^{(0)}/[\operatorname{ch}(k\Delta_1) + (1/3)(K + 2/K)\operatorname{sh}(k\Delta_1)]^{-1} = \mathbf{H}^{(i)}, \quad (5\text{-}50)$$

совпадающим с направлением напряженности поля однородного экрана. Из этого выражения

$$Э^{c(1)} = \operatorname{ch}(k\Delta_1) + (1/3)(K + 2/K)\operatorname{sh}(k\Delta_1),$$

что соответствует формуле (3-35а) при $p_{2,1} = 1$.

Для расчета второго приближения разложим в ряд коэффициент k_n:

$$k_n \approx k[1 + 0{,}5(n+1)n/(k^2 R_1^2)]. \quad (5\text{-}51)$$

Верхняя греница N переменной суммирования n определится соотношением

$$[N] = kR, \quad (5\text{-}52)$$

причем N — наибольшее четное число, равное или меньшее величины $|k|R$. Вместо первого приближения для постоянных A_n^{*} и B_n^{*}:

$$A_n^{*} = b_n(0{,}5K + 1)\mathbf{H}^{(i)}/2K; \quad B_n^{*} = b_n(0{,}5K - 1)\mathbf{H}^{(i)}/(2K), \quad (5\text{-}53)$$

где $b_n = (-1)^{0,5n+1}(2n+1)\psi_n/[(n+2)(n-1)]$, введем в уравнения (5-49) величины A_n^{*} и B_n^{*}:

$$\begin{aligned} A_n^{*} &= b_n(0{,}5K + 1)\mathbf{H}^{(i)}/(2K) + \delta A_n; \\ B_n^{*} &= b_n(0{,}5K - 1)\mathbf{H}^{(i)}/(2K) + \delta B_n. \end{aligned} \quad (5\text{-}54)$$

Принимая во внимание лишь члены второго порядка малости, получим уравнения

$$(1 + K/m)\exp(k\Delta_1)\,\delta\alpha_m + (1 - K/m)\exp(-k\Delta_1)\,\delta\beta_m =$$
$$= \{K/m[\operatorname{sh}(k\Delta_1) + 2K^{-1}\operatorname{ch}(k\Delta_1)] + k\Delta_1[(2/m + 1)\operatorname{sh}(k\Delta_1) +$$
$$+ (K/m + 2/K)\operatorname{ch}(k\Delta_1)]\}(h_m/2); \quad (5\text{-}55)$$

$$\left(1 - \frac{K}{m+1}\right)\delta\alpha_m + \left(1 + \frac{K}{1+m}\right)\delta\beta_m = -h_m/(m+1),$$

в которых неизвестные $\delta\alpha_m$, $\delta\beta_m$ определяются конечными суммами:

$$\delta\alpha_m = \sum_{n=2,\,4,\,\ldots}^{N} b_{m,\,n}\,\delta A_n;\quad \delta\beta_m = \sum_{n=2,\,4,\,\ldots}^{N} b_{m,\,n}\,\delta B_n, \tag{5-56}$$

а величина

$$h_m \approx (-1)^{0,5\,(m-1)}\frac{2m+1}{m+1}\,\psi_{m-1}\,\frac{i\mathbf{H}^{(i)}}{2\pi\,|k|\,R_1}\times$$
$$\times\begin{cases}1, & m=1;\\ 1-\dfrac{m}{2N}\ln\dfrac{N+m}{N-m}, & m=3,\ 5,\ \ldots,\ N-1.\end{cases}$$

Скалярный потенциал и составляющие напряженности магнитного поля в полости сферы определяются в виде

$$v = \sin\varphi \sum_{m=1,\,3,\,\ldots} D_m r^m P_m^{(1)}(\cos\theta); \tag{5-57а}$$

$$\mathbf{H}_r = \sin\varphi \sum_{m=1,\,3,\,\ldots} mD_m r^{m-1} P_m^{(1)}(\cos\theta); \tag{5-57б}$$

$$\mathbf{H}_\varphi = (\cos\varphi/\sin\theta) \sum_{m=1,\,3,\,\ldots} D_m r^{m-1} P_m^{(1)}(\cos\theta); \tag{5-57в}$$

$$\mathbf{H}_\theta = \sin\varphi \sum_{m=1,\,3,\,\ldots} D_m r^{m-1} P_m^{(1)\prime}(\cos\theta), \tag{5-57г}$$

где D_m находится из уравнения

$$\left.\begin{matrix}-0,5\,(D_1+\mathbf{H}^{(i)}), & m=1\\ D_m R^{m-1}/(m+1), & m=3,\ 5,\ \ldots\end{matrix}\right\} = \delta\alpha_m + \delta\beta_m =$$
$$= \Big\{[0,5K-(m/K)]\,\mathrm{sh}\,(k\Delta_1) + k\Delta_1\Big[(0,5m+1)\,\mathrm{sh}\,(k\Delta_1) +$$
$$+\left(0,5K+\frac{m}{K}\right)\mathrm{ch}\,(k\Delta_1)\Big]\Big\}\Big/\Big\{(2m+1)\,\mathrm{ch}\,(k\Delta_1) +$$
$$+\left[K+\frac{m\,(m+1)}{K}\right]\mathrm{sh}\,(k\Delta_1)\Big\}\times$$
$$\times\, h_m \approx \begin{cases} h_m, & |k|\,\Delta_1<1,\ K\gg 1;\\ 0,5\,(1+0,5k\Delta_1)\,h_m, & |k|\,\Delta_1>1,\ K\gg 1;\\ (1/3)\,(k\Delta_1)^2\,h_m/(m+1), & |k|\,\Delta_1<1,\ K\ll 1;\\ (k\Delta_1-1)\,h_m/(m+1), & |k|\,\Delta_1>1,\ K\ll 1.\end{cases} \tag{5-58}$$

Величина D_1 может быть с достаточной точностью определена из выражения (5-50).

Эффективность экранирования для радиальной составляющей напряженности магнитного поля

$$\text{Э}_m^{c\,(1)}(r) = \text{Э}^{c\,(1)}\Big\{\sum_{m=1,\,3,\,\ldots} D'_m r^{m-1} P_m^{(1)}(\cos\theta)\Big\}^{-1}, \tag{5-59}$$

где $D'_m = mD_m/\mathbf{H}^{(i)}$.

Первый член в формуле (5-59) представляет собой эффективность экранирования однородным экраном, рассчитанную по (3-35а). Остальные составляющие вызваны неоднородностью экрана (наличием стыка в экваториальной плоскости). Они приводят к снижению эффективности экранирования.

5-2. ЭКРАНИРОВАНИЕ ОБОЛОЧКАМИ НЕОДНОРОДНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Оболочки с отверстиями. Напряженность поля проникает через структуру экранирующей оболочки двумя путями: через материал стенок и через щели и отверстия. Наряду со значительным снижением эффективности экранирования в этом случае могут наступить и резонансные явления, которые в экранирующих системах обнаруживались неоднократно в области частот от 5 кГц и выше. И связано это было с неодинаковым фазовым сдвигом в распределении электромагнитных волн [51].

Эффективность экранирования замкнутой оболочкой с отверстиями определяют в инженерной практике из решения двух задач:

определения эффективности экранирования замкнутой оболочкой в отсутствие щелей и отверстий — $Э_1^{s\,(1)}$;

определения эффективности экранирования оболочкой в предположении бесконечной проводимости материала ее стенок и проникновения поля только через щели и отверстия — $Э_0^{s\,(1)}$.

Такой подход помогает решить вопрос о допустимости отверстий и щелей различной формы, т. е. вопрос о выборе конструкции экранирующей системы. Если предположить в первом приближении, что векторы напряженности электромагнитных полей, проникающих через материал стенок и через отверстия, одинаково ориентированы в пространстве и совпадают по фазе, т. е. складываются арифметически, то

$$Э^{s\,(1)} = Э_1^{s\,(1)} Э_0^{s\,(1)} / (Э_1^{s\,(1)} + Э_0^{s\,(1)}). \tag{5-60}$$

Анализ показывает, что $Э^{s\,(1)}$ может быть с большой степенью точности представлена в виде произведения двух сомножителей, если размеры замкнутой оболочки велики по сравнению с толщиной ее стенок и глубиной проникновения напряженности поля в материал стенок оболочки: один — зависит от геометрических размеров и не зависит от толщины и материала стенок, а другой — определяется только материалом, толщиной стенок оболочки и частотой поля. Физически второй сомножитель представляет собой эффективность экранирования бесконечным плоским экраном из того же материала и той же толщины, что и данный материал по отношению к плоской электромагнитной волне, падающей на него под прямым углом,

$$Э_1^{п\,(1)} = 60\pi\gamma\delta\,|\,\mathrm{sh}\,(1-i)\,\alpha/(1-i)\,|, \tag{5-61}$$

где $\delta = [2/(\omega\gamma\mu)]^{0,5}$; $\alpha = \Delta_1/\delta$; Δ_1 — толщина стенки.

Можно показать, что для каждой толщины Δ_1 существует определенная граничная частота $f_г$, выше которой эффективность экранирования $Э_1^{п\,(1)}$ больше у ферромагнетика и ниже — у проводящего немагнитного материала. Граничная частота определяется формулой

$$f_г = 0{,}5\nu_{1,\,0}\Delta_1^{-2}, \tag{5-62}$$

где $\nu_{1,\,0} = \mu_1/\mu_0$.

Для экранов конечных размеров в области низких частот, когда линейные размеры экрана становятся соизмеримыми (и меньше) с величиной δ, формула (5-61) теряет силу.

Эффективность экранирования замкнутыми оболочками рассчитывалась в § 2-4. Поэтому остановимся лишь на расчете эффективности экранирования оболочками с отверстиями. Здесь приходится прибегать к еще большей идеализации, чем при расчете эффективности экранирования замкнутыми оболочками.

Порядок величины эффективности экрана, имеющего одно круглое или квадратное отверстие, площадь которого σ мала по сравнению с площадью всей поверхности экрана F, а линейные размеры малы по сравнению с длиной волны, можно найти по формуле

$$Э_0^{s\,(1)} = 0{,}25\,(F/\sigma)^{1,5}. \tag{5-63}$$

Формула дает достаточно точное значение эффективности экранирования для сферического экрана с $R \ll \lambda/(2\pi)$ и бесконечно тонкими идеально проводящими стенками. Диполь при расчете находился в центре сферы, отверстие — в плоскости рамки (на экваторе). Точка наблюдения располагалась на радиусе, проходящем через отверстие. Расстояние r от нее до центра экрана удовлетворяло условию непрерывности ($r \gg R$).

Отверстие прямоугольной формы со сторонами a и b, если оно расположено длинной стороной b перпендикулярно путям токов, которые протекали бы в данном месте по поверхности целого экрана, нарушает распределение этих токов и уменьшает эффективность экранирования в бо́льшей степени, чем круглое отверстие, равное по площади прямоугольному. Прямоугольное отверстие может быть приравнено к круглому с площадью

$$\sigma_д = k\sigma, \tag{5-64}$$

где

$$k = (b\alpha^2/a)^{1/3};\quad \alpha = \begin{cases} 1, & b/a = 1; \\ 2,\,2, & b/a = 5; \\ b/[2\ln 0{,}63\,(b/a)], & b/a \gg 5. \end{cases}$$

Эффективность экранирования оболочки с n отверстиями может быть ориентировочно рассчитана по формуле

$$Э_{0n}^{s(1)}=\left(\sum_{\nu=1}^{\nu=n} 1/Э_{0\nu}^{s(1)}\right)^{-1}, \qquad (5\text{-}65)$$

где $Э_{0\nu}^{s(1)}$ — эффективность экранирования оболочкой при наличии лишь одного отверстия ν.

Для одинаковых по площади отверстий

$$Э_{0}^{s(1)}=(1/n)\,Э_{0\nu}^{s(1)}.$$

При замене одного большого отверстия n малыми такой же формы и с той же суммарной площадью эффективность экранирования возрастает в $n^{0,5}$ раз.

Сетчатые и решетчатые оболочки. Как уже отмечалось, иногда приходится создавать экраны, изготовленные из металлической сетки. Такие экраны могут иметь близкие к сплошным экранирующие функции и приемлемые массо-габаритные и технико-экономические показатели. При этом сетчатые экраны имеют некоторые преимущества перед сплошными: улучшенный теплообмен с внешней средой; возможность визуального наблюдения за техническим состоянием электрооборудования в процессе эксплуатации и более удобного его ремонта.

Расчет сетчатого экрана сводится к расчету эквивалентного ему сплошного экрана — использованию приближенных граничных условий, которые учитывали бы как форму экрана и размеры его ячеек, так и электромагнитные параметры составляющих его материалов: электрическую проводимость γ, магнитную проницаемость μ.

Здесь приводятся формулы для расчета эффективности экранирования сетчатыми экранами на базе решения уравнений Лапласа для скалярных магнитных потенциалов при использовании методики, разработанной для расчета сплошных тонкостенных экранов [1], ограниченных полными координатными поверхностями, удовлетворяющими условиям

$$h_{q_1}=1; \qquad (\partial/\partial q_1)(h_{q_2}/h_{q_3})=0, \qquad (5\text{-}66)$$

где h_{q_β} ($\beta=1,\ 2,\ 3$) — коэффициент Ламе; q_β — система ортогональных криволинейных координат.

Постановка задачи. На сетчатую оболочку, состоящую из системы непрямолинейных и непараллельных проводников, расположенных на координатной поверхности, удовлетворяющей условиям (5-66), падает напряженность электромагнитного поля, например низкочастотного магнитного диполя $D[\mathbf{M},\mathbf{r}_0]$, произвольно расположенного и ориентированного в пространстве. Здесь $\mathbf{M}$ — вектор-момент диполя в функции времени; $\mathbf{r}_0(q_{10},q_{20},q_{30})$ — радиус-вектор расположения диполя относительно начала координат. Требуется определить экранирующие функции такой оболочки.

Метод решения. Решать задачу для поля в низкочастотном диапазоне целесообразно без подробного исследования электромагнитных процессов в самой сетчатой оболочке, а напряженность полей во внешней и внутренней к экрану областях — сопрягать с помощью приближенных граничных условий. При таком подходе задача сводится к скалярной: должны быть решены уравнения Лапласа для скалярных магнитных потенциалов v_1 и v_2 при соответствующих граничных условиях на поверхности и регулярности решений в бесконечности

$$\left[(\partial v_\alpha/\partial q_\beta)\big|_{q_\beta \to \infty} = 0; \quad \alpha = 1,\ 2; \quad \beta = 1,\ 2,\ 3; \ v_\alpha(\infty) = 0\right].$$

Скалярные потенциалы определяются в виде

$$v_1 = v^{(0)} + v^{(1)}; \quad v_2 = v^{(0)} + v^{(2)};$$
$$v^{(0)} \in [q_{10};\ \infty]; \quad v^{(1)} \in [q_{10};\ \xi_1]; \quad v^{(2)} \in [\xi_1;\ \infty], \tag{5-67}$$

где $v^{(0)}$ — скалярный магнитный потенциал исходного поля диполя; $v^{(1)}$, $v^{(2)}$ — скалярные магнитные потенциалы возбужденных полей перед экраном и за экраном.

В качестве граничных условий для сетки, изготовленной из непараллельных и непрямолинейных проводников, расположенных на неплоской поверхности, используются условия [11]

$$\mathbf{E}_\tau = 2\omega b\left(\ln\frac{b}{a} - 1{,}84\right)\Big\{(1 + F_\tau)\,\mathbf{j} + k^{-2}\left[b(1+\chi) + a\right]^{-1} \times$$
$$\times\left[\left(\frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial \eta} - \frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial \tau}\right)\frac{\partial}{\partial \tau}(\mathbf{j}b) + \chi\,\frac{\partial^2(\mathbf{j}b)}{\partial \tau^2}\right]\Big\}, \tag{5-68}$$

где $\mathbf{E}_\tau$ — составляющие напряженности электрического поля, касательные к проводникам; $\mathbf{j}$ — поверхностная плотность тока; a, b — размеры ячейки по осям q_2, q_3; μ_0 — магнитная проницаемость воздушной среды; χ — характеристика контактного сопротивления в узлах сетки.

Если переписать (5-68) в виде

$$\mathbf{E}_\tau = \rho_\tau \mathbf{j}, \tag{5-69}$$

то

$$\rho_\tau = 2b\omega\left(\ln\frac{b}{a} - 1{,}84\right)\Big\{(1 + F_\tau) + k^{-2}\left[b(1+\chi) + a\right]^{-1} \times$$
$$\times\Big[\left(\frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial \tau} - \frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial \tau}\right)\left(\frac{\partial b}{\partial \tau} + b\frac{\partial}{\partial \tau}\right) +$$
$$+ \chi\left(\frac{\partial^2 b}{\partial \tau^2} + 2\frac{\partial b}{\partial \tau}\frac{\partial}{\partial \tau} + b\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right)\Big]\Big\} \tag{5-70}$$

можно трактовать как оператор сопротивления, зависящий от размеров экранирующей сетки и параметров ее материала. С другой стороны, оператор (5-70) можно связать с сопротивлением сплошного тонкостенного экрана:

$$k_\tau = 1\Big/\int_0^\Delta (1/\rho_\tau)\,d\xi, \tag{5-71}$$

где Δ — толщина сплошного экрана, к которому приводится сетчатый (по габаритным размерам и расходуемому материалу).

Используя формулу (5-70) с учетом (5-71), можно перейти к граничному условию

$$k_\tau \operatorname{div} \operatorname{grad} (v^{(1)} - v^{(2)}) + \operatorname{grad} k_\tau \operatorname{grad} (v^{(1)} - v^{(2)}) = = -\mu_0 \omega \frac{\partial}{\partial n} (v^{(0)} + v^{(1)}) \quad (5\text{-}72)$$

в функциях скалярных потенциалов ($\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к поверхности оболочки).

В качестве второго граничного условия используется непрерывность нормальных составляющих напряженности магнитного поля

$$(\partial v^{(2)}/\partial n)\big|_{q_1=\xi_1} = (\partial v^{(1)}/\partial n)\big|_{q_1=\xi_1}. \quad (5\text{-}73)$$

Учитывая, что здесь рассматриваются сетчатые экраны, ограниченные координатными поверхностями, удовлетворяющими условиям (5-66), фундаментальные решения уравнения Лапласа для потенциалов $v_{nm}^{(0)}$, $v_{nm}^{(1)}$, $v_{nm}^{(2)}$ целесообразно представить в виде

$$\begin{gathered} v_{nm}^{(0)} = B_{nm} P_{nm}(q_1) Y_{nm}(q_2, q_3), \quad q_1 > q_{10}; \\ \begin{matrix} v_{nm}^{(1)} \\ v_{nm}^{(2)} \end{matrix} = \begin{pmatrix} a_{nm}^{(1)} \\ a_{nm}^{(2)} \end{pmatrix} Y_{nm}(q_2, q_3) \begin{cases} F_{nm}(q_1), & q_1 < \xi_1; \\ P_{nm}(q_1), & q_1 \geqslant \xi_1, \end{cases} \\ n \in [0; \infty]; \ m \in [-n; n], \end{gathered} \quad (5\text{-}74)$$

где B_{nm} — известные постоянные интегрирования дипольного источника напряженности поля; $Y_{nm}(q_2, q_3)$ — поверхностные гармоники; $F_{nm}(q_1)$ и $P_{nm}(q_1)$ — координатные функции по q_1 первого и второго рода:

$$P_{nm}(\infty) = 0; \quad P_{nm}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \infty; \quad F_{nm}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0; \quad F_{nm}(\infty) = \infty;$$

ξ_1 — расстояние от центра системы координат до экранирующей оболочки.

Граничные условия (5-72) и (5-73) в координатах (q_1, q_2, q_3) приобретают вид

$$\left[\frac{1}{h_{q_2}^2} \frac{\partial k_\tau}{\partial q_2} \frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{1}{h_{q_3}^2} \frac{\partial k_\tau}{\partial q_3} \frac{\partial}{\partial q_3} + \frac{k_\tau}{h_{q_2} h_{q_3}} \left(\frac{\partial}{\partial q_2} \frac{h_{q_3}}{h_{q_2}} \frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{\partial}{\partial q_3} \frac{h_{q_2}}{h_{q_3}} \frac{\partial}{\partial q_3}\right)\right] (v_{nm}^{(1)} - v_{nm}^{(2)})\big|_{q_1=\xi_1} = = -\mu_0 \omega \frac{\partial}{\partial q_1} (v_{nm}^{(0)} + v_{nm}^{(1)})\big|_{q_1=\xi_1}; \quad (5\text{-}75)$$

$$\left.\frac{\partial v_{nm}^{(1)}}{\partial q_1}\right|_{p_1=\xi_1} = \left.\frac{\partial v_{nm}^{(2)}}{\partial q_1}\right|_{q_1=\xi_1}. \quad (5\text{-}76)$$

Если поле низкочастотное, то $ka\,(kb) \to 0$ и

$$k_\tau = 2\omega b\,[\ln (b/a) - 1{,}84]\,(1 + F_\tau) = \text{const}. \tag{5-77}$$

Функция F_τ может быть определена в виде

$$F_\tau = f\,(s)/\{4\pi \ln [\zeta/(2\pi r_0)]\}, \quad \zeta = (a;\ b). \tag{5-78}$$

При $F_\tau = 0$ имеет место бесконечная электрическая проводимость γ при $\mu = \mu_0$. Очевидно, что при учете конечных значений γ, μ необходимо пересмотреть те положения предыдущего анализа, которые теперь окажутся несправедливыми: а) сумма касательных к проводам составляющих электрической напряженности поля при произвольном значении γ не равна нулю; б) распределение тока по сечению провода имеет неоднородный характер. Если учесть явление поверхностного эффекта в проводах сетки, то можно получить ответы на оба пункта. Оказывается, что поля, создаваемые сетчатым экраном, состоящим из проводников радиуса r_0, и сплошным экраном, одинаковы и для произвольного значения γ, если для материала проводника справедливо условие

$$\varepsilon = -i\,(4\pi\gamma/\omega), \tag{5-79}$$

выполняемое в области низких частот. Тогда

$$f\,(s) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \gamma = \infty \\ 1 - (i/s^2) & \text{для малых } s \\ (1 - i)/s & \text{для больших } s \\ s = (\omega L_i/R_0) = r_0/(2\delta); & \end{cases} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{при} \quad \gamma \neq \infty;$$

$R_0 = 1/(\pi\gamma r_0^2)$; s — коэффициент, зависящий от степени поверхностного эффекта: $\delta = [2/(\omega\mu\gamma)]^{0,5}$.

Результаты решения. Подстановка выражений для $v_{nm}^{(0)}$, $v_{nm}^{(1)}$, $v_{nm}^{(2)}$ из (5-74) в условия (5-75) — (5-76) при учете (5-77) приводит к системам бесконечных алгебраических уравнений, используя которые для эффективности экранирования по гармоникам, получаем

$$Э_{nm}^{s\,(1)} = [k_\tau \chi_2 l \Delta_{n,\,m} + \mu_0 \omega a_2 b_2]/(k_\tau \chi_2 l \Delta_{n,\,m}); \tag{5-80а}$$

$$W_{nm\,(a)}^{s\,(1)} = -\mu_0 \omega b_2^2/[k_\tau \chi_2 l \Delta_{n,\,m} + \mu_0 \omega a_2 b_2], \tag{5-80б}$$

где $\chi_2 = (h_{q_1}/h_{q_2}^2)\,|_{q_1 = \xi_1}$; $a_1 = F_{nm}(\xi_1)$; $a_2 = F'_{nm}(\xi_1)$; $b_1 = P_{nm}(\xi_1)$; $b_2 = P'_{nm}(\xi_1)$; $\Delta_{n,\,m} = a_2 b_1 - a_1 b_2$ — определитель Вронского; штрихи у функций означают производные по координате q_1.

Если устремить a, $b \to 0$, то $k_\tau \to 1/(\Delta\gamma)$, а выражения (5-80) преобразуются в формулы для сплошного тонкостенного экрана (2-21) с учетом (3-15) и $p = 0$.

Рассмотрим эффективность экранирования по гармоникам наиболее употребительными сетчатыми экранами.

Плоские экраны. В координатах $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$ выражения (5-80) при $a_1 = b_1 = 1$; $a_2 = \sqrt{m^2p^2 + n^2q^2}$; $b_2 = -\sqrt{m^2p^2 + n^2q^2}$; $\chi_2 = 1$; $l = -(m^2p^2 + n^2q^2)$; $\Delta_{n,m} = -2\sqrt{m^2p^2 + n^2q^2}$, где p, q — коэффициенты, приобретают вид

$$Э_{nm}^{п(1)} = \left(\mu_0\omega + 2k_\tau\sqrt{m^2p^2 + n^2q^2}\right)/\left(2k_\tau\sqrt{m^2p^2 + n^2q^2}\right); \quad (5\text{-}81а)$$

$$W_{nm}^{п(1)} = -\mu_0\omega\left[\mu_0\omega + 2k_\tau\sqrt{m^2p^2 + n^2q^2}\right]^{-1}. \quad (5\text{-}81б)$$

В выражениях (5-81) k_τ используется в виде (5-77). Если a, $b \to 0$, то при $f(s) = 1 - i/s^2 \approx -i/s^2$, выражение $k_\tau \to 1/(\gamma\Delta)$, а формулы (5-81) преобразуются в уже известные (3-167) при $p = 0$ для сплошных плоских экранов.

Если плоская сетка заменяется системой радиальных проводов на плоскости, расположенных под одинаковыми углами $\Delta\varphi$ по отношению друг к другу, то в выражение (5-77) вместо b необходимо подставить $\rho\Delta\varphi$ ($b = \rho\,\Delta\varphi$), где ρ — радиальная координата в координатах (ρ, φ). Предполагается при этом, что радиус проводов меняется пропорционально b.

При расчете параметров экранов в виде концентрических колец на плоскости и колец, расположенных на сфере в виде параллелей на равных расстояниях друг от друга, k_τ определяют по формуле (5-77).

Круговые цилиндрические экраны. В координатах $q_1 = R$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$ выражения (5-80) при $a_1 = I_m(\nu_1)$; $a_2 = I'_m(\nu_1)$; $b_1 = K_m(\nu_1)$; $b_2 = K'_m(\nu_1)$; $l = -\lambda^2$; $\chi_2 = R_1^{-2}$; $\Delta_{\lambda,m} = -(1/\nu_1)$; $\nu_1 = |\lambda| R_1$ приобретают вид

$$Э_{\lambda,m}^{ц(1)} = [k_\tau|\lambda| + \mu_0\omega R_1^3 I'_m(\nu_1)K'_m(\nu_1)]/(k_\tau|\lambda|); \quad (5\text{-}82а)$$

$$W_{\lambda,m}^{ц(1)} = -\mu_0\omega R_1^3 K'^2_m(\nu_1)/[k_\tau|\lambda| + \mu_0\omega R_1^3 I'_m(\nu_1)K'_m(\nu_1)], \quad (5\text{-}82б)$$

$$\lambda \in [0;\ \infty]; \quad m \in [0;\ \lambda].$$

При $k_\tau \to 1/(\Delta\gamma)$ (a, $b \to 0$) формулы (5-82) преобразуются в (3-163) при $p = 0$.

Сферические экраны. В координатах $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$ выражения (5-80) при $a_1 = R_1^n$; $a_2 = nR_1^{n-1}$; $b_1 = R_1^{-n-1}$; $b_2 = -(n+1)R_1^{-n-2}$; $\chi_2 = R_1^{-2}$; $l = -n(n+1)$; $\Delta_{n,m} = -(2n+1)R_1^{-2}$ приобретают вид

$$Э_n^{с(1)} = [k_\tau(2n+1) + \mu_0\omega R_1]/[k_\tau(2n+1)]; \quad (5\text{-}83а)$$

$$W_n^{с(1)} = -\mu_0\omega(n+1)R_1/\{n[(2n+1)k_\tau + \mu_0\omega R_1]\}, \quad n \in [1;\ \infty]. \quad (5\text{-}83б)$$

В выражениях (5-83) k_τ используется в виде

$$k_\tau = (2\omega bR\sin\theta\,\Delta\varphi)(\ln(b/a) - 1{,}84)(1 + F_\tau), \quad (5\text{-}84)$$

если сферическая поверхность радиуса R образуется в виде меридиональных проводов на равных угловых расстояниях $\Delta\varphi$ друг от друга. В этой формуле принято, что радиус проводов меняется с изменением угла θ пропорционально b.

Полученные формулы для $Э_{n,m}^{s(1)}$ и $W_{n,m}^{s(1)}$ можно рассматривать как приближенные. Они выведены [11] при следующих допущениях: диаметр проводников, из которых изготовлена сетка, мал по сравнению с шагами сетки, а шаги сетки малы по сравнению с длиной волны λ ($\lambda \gg a$, $b \gg d$), поэтому напряженность поля сетки можно рассматривать в виде наложения напряженности двух полей. Одно из них, определяемое в основном формой поверхности сетки, условно называется «дальним». На него накладывается поле «ближнее», которое по структуре подобно строению ячеек сетки. Оно исчезает при удалении от поверхности сетки на расстояние, соизмеримое с размерами ячеек. Отсюда следует, что без изменения общего геометрического рисунка ячеек сетки можно, не вызывая изменения «дальнего» поля, сократить область распространения «ближнего» поля. Сокращая размеры ячеек сетки до нуля, получаем идеальную сетку (сплошной экран), совершенно не имеющую «ближнего» поля и сохранившую «дальнее» поле таким же, каким оно было у соответствующей идеальной сетки. Из рассмотрения видно, что введенные допущения, связанные с самим методом расчета, не вносят существенных погрешностей в расчеты на расстояниях ξ от сетки, превышающих размеры ячеек ($\xi > a, b$), а формулы (5-80) преобразуются в формулы для сплошных тонкостенных экранирующих оболочек (2-21) с учетом (3-15) и $p = 0$. Выражения (5-80) для эффективности экранирования сетчатым экраном не зависят от частоты помехонесущего поля. Даже если учесть в коэффициенте k_τ конечность электрической проводимости материала проволок γ и магнитную проницаемость μ в виде формулы (5-84), то зависимость будет столь слабой, что в большинстве случаев членом F_τ можно пренебречь. Это позволяет рассчитывать, что полученные для эффективности экранирования формулы окажутся пригодными не только при гармонических изменениях помехонесущего поля, но также и для импульсных полей произвольной формы.

5-3. ЭКРАНИРОВАНИЕ ОБОЛОЧКАМИ С ПЕРЕМЕННЫМИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Общая методика расчета. В энергоустановках с целью снижения напряженности помехонесущих электромагнитных полей, что способствует улучшению условий обитаемости и электромагнитной совместимости разнородного оборудования, прибегают к использованию проводящих ферромагнитных экранов. При разработке им, как правило, стремятся придать аналитическую форму (например, ограниченную координатными поверхностями) и сделать замкнутыми. На практике это удается редко из-за технологических и конструктивных трудностей. Учет возникающих при этом неоднородностей по форме не может быть выполнен с помощью строгих аналитических методов. Кроме того, материалы, из которых изготовляют экраны, могут иметь переменные электрические и магнитные проводимости по объему. Отмеченные неоднородности приводят к перераспределению напряженности полей как внутри, так и за пределами экранирующих оболочек.

Класс применяемых в настоящее время экранирующих оболочек с переменными параметрами велик, поэтому есть потребность в разработке методов, математически строгих и не слишком трудоемких при выполнении расчетов. Наличие таких методов позволит, не прибегая к дорогостоящим экспериментам или моделям, оценить качественно, а иногда и количественно, поведение экранирующих оболочек с переменными свойствами при падении на них напряженности неоднородных полей.

Ниже приводятся примеры расчета параметров проводящих ферромагнитных экранирующих оболочек, ограниченных полными координатными поверхностями, с переменными электрическими и магнитными параметрами по объему. В связи с тем, что разработка аналитических методов расчета таких оболочек в общем виде чрезвычайно сложна, исследование можно проводить на основе решения двух задач: в первой — изучают экранирующие функции при изменении параметров материала по толщине оболочки, во второй — при изменении параметров материала по поверхности. Суммарное решение можно находить путем сложения двух полученных решений.

Оболочки с анизотропной магнитной проницаемостью. Иногда необходимо считаться с тем, что магнитная проницаемость материала оболочки не может рассматриваться постоянной: она изменяется как по толщине оболочки, так и по поверхности. Примером являются оболочки, изготовленные из анизотропной среды с тензором магнитной проницаемости вида

$$\hat{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 \end{pmatrix}, \tag{5-85}$$

записанной в координатах (q_1, q_2, q_3). Здесь первая строка соответствует координате q_1, вторая и третья — координатам q_2 и q_3.

Задача определения экранирующих функций оболочки сводится к решению уравнений Максвелла в области D_j $(j = 0, 1, 2)$ (см. § 2-1) в режиме магнитостатики, когда область D_1 $(\xi_1 < q_1 < \xi_2)$ занята анизотропным ферромагнетиком. Вводя в уравнение

$\operatorname{div}\mathbf{B}=0$ скалярный магнитный потенциал $\mathbf{H}=-\operatorname{grad}v$, получим

$$\operatorname{div}(\hat{\mu}\operatorname{grad}v)=0. \quad (5\text{-}86)$$

Уравнение (5-86) для областей D_0 и D_2 приводится к скалярному уравнению Лапласа (1-16) для потенциалов v_j ($j=0, 2$). В материале оболочки (область D_1) в зависимости от выбранной системы координат получают дифференциальное уравнение более сложного типа, чем уравнение Лапласа. В качестве граничных условий используются условия вида (2-1).

Сферическая оболочка. Решаем уравнение (5-86) методом разделения переменных в сферических координатах (r, θ, φ):

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dA}{dr}\right)-\lambda(\lambda+1)\frac{\mu_2}{\mu_1}A=0;$$

$$\sin\theta^{-1}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dB}{d\theta}\right)+\left[\lambda(\lambda+1)-\frac{\mu^2}{\sin^2\theta}\right]B=0; \quad (5\text{-}87)$$

$$\frac{d^2C}{d\varphi^2}+\mu^2C=0,$$

где $v=A(r)B(\theta)C(\varphi)$.

На основании частных решений уравнения Лапласа задача экранирования записывается в виде

$$v_0=v^{(0)}+\sum_n\sum_m y_{nm}^{(0)}r^nY_{nm}(\theta,\varphi) \text{ — в области } D_0;$$

$$v_1=\sum_n\sum_m\left(x_{nm}^{(1)}r^{-\alpha_n^{(2)}}+y_{nm}^{(1)}r^{\alpha_n^{(1)}}\right)Y_{nm}(\theta,\varphi) \text{ — в области } D_1; \quad (5\text{-}88)$$

$$v_2=\sum_n\sum_m x_{nm}^{(2)}r^{-n-1}Y_{nm}(\theta,\varphi) \text{ — в области } D_2$$

$$(n\in[0;\ \infty];\ m\in[-n;\ n]),$$

где $v^{(0)}=\sum_n\sum_m a_{nm}r^{-n-1}Y_{nm}(\theta,\varphi)$ — в области D_0; $\alpha_n^{(1)}=-0{,}5+[0{,}25+n(n+1)\nu_{2,1}]^{0{,}5}$; $\alpha_n^{(2)}=0{,}5+[0{,}25+n(n+1)\nu_{2,1}]^{0{,}5}$, $\nu_{2,1}=\mu_2/\mu_1$.

Подстановка решений (5-88) в условия (2-1) приводит к системе линейных алгебраических уравнений, откуда

$$\begin{aligned}Э_n^{c(1)}=\{&(\nu_{1,0}\alpha_n^{(1)}+n+1)(\nu_{1,0}\alpha_n^{(2)}+n)-(\nu_{1,0}\alpha_n^{(1)}-n)\times\\&\times(\nu_{1,0}\alpha_n^{(2)}-n-1)p_{1,2}^{\alpha_n^{(1)}+\alpha_n^{(2)}}\}\Big/\Big[(2n+1)\times\\&\times\nu_{1,0}(\alpha_n^{(1)}+\alpha_n^{(2)})p_{1,2}^{\alpha_n^{(1)}-n}\Big];\end{aligned} \quad (5\text{-}89а)$$

$$\begin{aligned}W_{n(a)}^{c(1)}=-&\left[(\nu_{1,0}\alpha_n^{(1)}+n+1)(\nu_{1,0}\alpha_n^{(2)}-n-1)\left(1-p_{1,2}^{\alpha_n^{(1)}+\alpha_n^{(2)}}\right)\right]\times\\&\times\Big[(\nu_{1,0}\alpha_n^{(1)}+n+1)(\nu_{1,0}\alpha_n^{(2)}+n)-(\nu_{1,0}\alpha_n^{(1)}-n)\times\\&\times(\nu_{1,0}\alpha_n^{2}-n-1)p_{1,2}^{\alpha_n^{(1)}+\alpha_n^{(2)}}\Big]^{-1}.\end{aligned} \quad (5\text{-}89б)$$

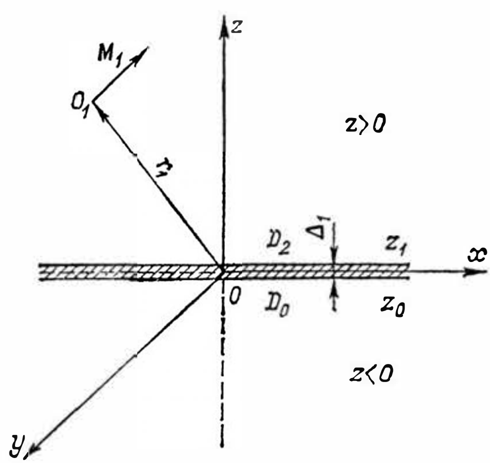


Рис. 5-10. Плоский экран под воздействием дипольного магнитного поля

Оболочки с переменной электрической проводимостью при изменении их толщины. Методика решения задачи может быть следующей: пространство, в котором распространяется напряженность электромагнитного поля, разбивается на три области — до оболочки, в оболочке и за оболочкой. В области до оболочки и за оболочкой напряженность поля описывается с помощью скалярных потенциалов, удовлетворяющих уравнению Лапласа (1-16). Напряженность поля в проводящей экранирующей оболочке описывается с помощью векторного магнитного потенциала **A**, удовлетворяющего уравнению

$$\Delta A = \mu_0 \gamma_{\delta_0} F(\xi)(\partial \mathbf{A}/\partial t), \tag{5-90}$$

где $F(\xi) = F[(\xi - \xi_1)/\xi_0]$; $\xi = \xi_0$ — плоскость, касательная к поверхности оболочки; $\xi = \xi_1$ — плоскость, отделяющая оболочку от диэлектрика. При $F(\xi) = 1$ имеем однородное распределение γ_δ ($\gamma_\delta = \text{const}$).

Уравнение (5-90) сводится к трем уравнениям для составляющих **A** ($\mathbf{A}_{q_\beta}$, $\beta = 1, 2, 3$), которые используются для определения составляющих напряженности $\mathbf{H}_{q_\beta}$. Составляющие напряженности магнитного поля в трех рассматриваемых областях сопрягаются на граничных поверхностях с целью определения постоянных интегрирования. Экранирующие функции определяются обычным способом по формулам (1-70) и (1-80).

Методика реализуется при расчете функций плоских экранирующих оболочек, а с небольшими допущениями — и при расчете сферических и круговых цилиндрических оболочек [1].

Плоские оболочки (рис. 5-10). Плоскостью экрана рассекается пространство на два полупространства. Можно выделить три области: первая — над экраном, вторая — в материале экрана, третья — под экраном. Магнитное поле создается магнитным диполем $D[\mathbf{M}_1, \mathbf{r}_1]$, размещенным в точке O_1. Решение задачи осуществляется по рассматриваемой методике. Граничные условия для магнитных напряженностей формулируются при $z = z_0$ и $z = z_1$ обычным образом:

$$\mathbf{H}_x^{(0)}\Big|_{z=z_0} = \mathbf{H}_x^{(1)}\Big|_{z=z_0}; \quad \mathbf{H}_x^{(1)}\Big|_{z=z_1} = \mathbf{H}_x^{(2)}\Big|_{z=z_1};$$
$$\mathbf{B}_z^{(0)}\Big|_{z=z_0} = \mathbf{B}_z^{(1)}\Big|_{z=z_0}; \quad \mathbf{B}_z^{(1)}\Big|_{z=z_1} = \mathbf{B}_z^{(2)}\Big|_{z=z_1}. \tag{5-91}$$

Векторный магнитный потенциал поля в экране описывается уравнением (5-90), где

$$F(\xi) = \exp\left(-2k\frac{z-z_1}{z_0}\right)$$

(k — целое положительное число). При $k=0$ произведение $\gamma_\delta = \gamma_{\delta_0}$, что соответствует однородному распределению γ_δ. При $k=1$, 2, 3 будем иметь различный характер изменения γ_δ при изменении толщины экрана.

Уравнение (5-90) сводится к двум:

$$\Delta \mathbf{A}_x = a^2 \exp\left(-2k\frac{z-z_1}{z_0}\right)(\partial \mathbf{A}_x/\partial t);$$

$$\Delta \mathbf{A}_y = a^2 \exp\left(-2k\frac{z-z_1}{z_0}\right)(\partial \mathbf{A}_y/\partial t), \qquad (5\text{-}92)$$

которые решаются методом разделения [1].

В результате решения экранирующие функции представляются в виде

$$Э^{п\,(1)}_{\lambda,\,m} = \{2a_3\lambda(a_2b_2 - a_1b_1) - [(b_1+b_2)(c_3+c_4) - $$
$$-(b_3+b_4)(c_1+c_2)](a_2b_3 + a_1b_4)\}/[2a_3d(a_1b_4 - \lambda a_2b_3)]; \qquad (5\text{-}93а)$$

$$W^{п\,(1)}_{\lambda,\,m\,(a)} = (a_1b_4 - \lambda a_2b_3)/\{\lambda(a_2b_3 + a_1b_4) -$$
$$-2a_3\lambda^2(a_2b_2 - a_1b_1)/[(b_1+b_2)(c_3+c_4) - (b_3+b_4)(c_1+c_2)]\}, \qquad (5\text{-}93б)$$

где

$$a_1 = I'_{\lambda_1}(\chi_1)K_{\lambda_1}(\rho_1) - K'_{\lambda_1}(\chi_1)I_{\lambda_1}(\rho_1);$$
$$a_2 = I'_{\lambda_1}(\rho_1)K_{\lambda_1}(\chi_1) - K'_{\lambda_1}(\rho_1)I_{\lambda_1}(\chi_1);$$
$$a_3 = I'_{\lambda_1}(\rho_1)K_{\lambda_1}(\rho_1) - K'_{\lambda_1}(\rho_1)I_{\lambda_1}(\rho_1);$$
$$b_1 = \lambda I'_{\lambda_1}(\chi_1); \quad b_2 = I'_{\lambda_1}(\chi_1); \quad b_3 = \lambda I_{\lambda_1}(\rho);$$
$$b_4 = \nu_{1,0} I'_{\lambda_1}(\rho_1); \quad c_1 = \lambda K_{\lambda_1}(\chi_1); \quad c_2 = K'_{\lambda_1}(\chi_1);$$
$$c_3 = \lambda K_{\lambda_1}(\rho_1); \quad c_4 = K'_{\lambda_1}(\rho_1); \quad \rho_1 = \chi_1 \exp\left(-m\frac{z-z_1}{z_0}\right);$$
$$d = \exp[\lambda(z_0 - z_1)]; \quad \lambda_1^2 = \lambda^2(z_0^2/m^2); \quad \chi_1^2 = \chi^2\frac{z_0^2}{m^2};$$
$$\chi^2 = i\alpha a^2; \quad \lambda^2 = m^2\alpha^2 + n^2\beta^2; \quad \rho_1^2 = \rho^2\frac{z_0^2}{m^2}; \quad a^2 = \mu_0\gamma\delta_1;$$

$\rho = \chi \exp\left(-k\frac{z-z_1}{z_0}\right)$; α, β — коэффициенты; $I_{\lambda_1}(\rho_1)$ и $K_{\lambda_1}(\rho_1)$ — модифицированные цилиндрические функции первого и второго рода; штрих обозначает производную по z.

Оболочки с переменными электромагнитными параметрами поверхности. Проиллюстрируем методику расчета функций тонкостенных однослойных экранирующих оболочек, поверхности которых совпадают с полными координатными поверхностями, а магнитная проницаемость μ и электрическая проводимость γ материала являются функциями поверхностных координат. Для удобства рассмотрения представим параметры оболочки $p(q_2, q_3)$, $q(q_2, q_3)$ в виде

$$p(q_2, q_3) = \frac{\mu(q_2, q_3)\Delta_1}{2\mu_0} = p^{(0)}[1 + \varepsilon_1 f_1(q_2) + \varepsilon_2 f_2(q_3)];$$

$$q(q_2, q_3) = \frac{2}{i\omega\mu_0\gamma(q_2, q_3)\Delta_1} = q^{(0)}[1 + \varepsilon_3 g_1(q_2) + \varepsilon_4 g_2(q_3)], \quad (5\text{-}94)$$

где $|\varepsilon_j| < 1$; будут рассматриваться функции f_j, g_j наиболее простого вида. Используются обозначения § 3-1. Источник электромагнитного поля — низкочастотный магнитный диполь $D[\mathbf{M}_1, \mathbf{r}_1]$, размещенный в точке O_1 области D_0, ограниченной исходной оболочкой S (рис. 2-2).

С математической точки зрения решение задачи экранирования сводится к нахождению скалярных потенциалов v_j ($j=0, 2$), удовлетворяющих уравнению Лапласа (1-16) в области D_j. На поверхности оболочки $S(q_1 = \xi_1)$ потенциалы сопрягаются с помощью условий (1-37), в которых используются $p(q_2, q_3)$, $q(q_2, q_3)$ из выражений (5-94).

Разрешение уравнения (1-16) с граничными условиями (1-37) и (5-94) затруднительно, поэтому при решении инженерных задач целесообразно исследовать частные случаи задания параметров p и q:

$$p = 0, \quad q = q(q_2, q_3) = q^{(0)}[1 + \varepsilon_3 g_1(q_2) + \varepsilon_4 g_2(q_3)];$$

$$p = p^{(0)}[1 + \varepsilon_1 f_1(q_2) + \varepsilon_2 f_2(q_3)], \quad q \to \infty;$$

при этом функции f_j и g_j выбираются гармоническими.

Потенциалы v_j в области D_j, как и при расчете однородных оболочек, представляются в виде (2-14). Постоянные интегрирования $y_{nm}^{(0)}$ определяются из граничных условий на оболочке; постоянные $x_{nm}^{(0)}$ определяются параметрами диполя $D[\mathbf{M}_1, \mathbf{r}_1]$, заданного в координатах (q_1, q_2, q_3).

При $p = 0$ проводящий электрический ток немагнитный экран имеет переменную электрическую проводимость $\gamma = \gamma \times \times (q_2, q_3)$. При решении таких задач в граничных условиях (1-37) и (5-94) приравниваются коэффициенты гармоник одной и той же степени m порядка n. В итоге получаются бесконечные системы линейных алгебраических уравнений относительно $y_{nm}^{(0)}$, $x_{nm}^{(2)}$:

$$x_{nm}^{(2)} = A_{00}^{nm} y_{nm}^{(0)} + f_{nm};$$

$$y_{nm}^{(0)} = \sum_{i=-M}^{M} \sum_{j=-N}^{N} B_{ij}^{nm} y_{n+i,\, m+j}^{(0)} + g_{nm}, \quad (5\text{-}95)$$

где коэффициенты и правые части системы зависят от формы и электрической проводимости оболочки и от постоянных $x_{nm}^{(0)}$.

Причем числа M и N растут при усложнении зависимостей (5-94).

При общей зависимости параметров p и q от поверхностных координат q_2 и q_3 формулы (5-94) итоговая система алгебраических уравнений приобретает вид

$$x_{nm}^{(2)} = \sum_{i=-M_1}^{M_1} \sum_{j=-N_1}^{N_1} \left[A_{ij}^{nm} y_{n+i,\, m+j}^{(0)} + C_{ij}^{nm} x_{n+i,\, m+j}^{(2)}\right] + f_{nm};$$
$$y_{nm}^{(0)} = \sum_{i=-M_2}^{M_2} \sum_{j=-N_2}^{N_2} \left[B_{ij}^{nm} y_{n+i,\, m+j}^{(0)} + D_{ij}^{nm} x_{n+i,\, m+j}^{(2)}\right] + g_{nm}. \quad (5\text{-}96)$$

Решение системы уравнений (5-95) или (5-96) может быть получено итерационными методами. Результаты численного решения системы позволяют определить набор экранирующих функций, характеризующих экранирующие свойства оболочек с переменными электромагнитными параметрами.

Построение решения системы уравнений (5-96) в общем виде представляется затруднительным, поэтому рассмотрение должно осуществляться применительно к конкретным оболочкам с заданными зависимостями (5-94) для μ и γ.

Разработанная методика может быть реализована применительно к оболочкам простых геометрических форм. Для примера рассмотрим плоскую оболочку с электромагнитными параметрами, зависящими от одной поверхностной координаты.

Плоские оболочки (рис. 5-10). При расчете плоской экранирующей оболочки $S(z=0)$ скалярные потенциалы $v_j\,(j=0,\ 2)$ представим в виде (2-14) в координатах $(x,\ y,\ z)$ в области $D_0\,(z<0)$ и $D_2\,(z>0)$. Зависимости (5-94) записываем в виде

$$p = p^{(0)}(1 + 2\varepsilon_1 \cos \tau_1 x), \quad \tau_1 = \mathrm{const}; \quad |\varepsilon_1| < 0{,}5;$$
$$q = q^{(0)}(1 + 2\varepsilon_2 \cos \tau_2 x), \quad \tau_2 = \mathrm{const}; \quad |\varepsilon_2| < 0{,}5. \quad (5\text{-}97)$$

Подставим потенциалы (2-14) в условия (1-34), заменим параметры интегрирования, применим интегральное преобразование Фурье. После этого получим систему уравнений для определения неизвестных функций $x^{(2)}(\lambda,\ \beta)$ и $y^{(0)}(\lambda,\ \beta)$:

$$X(\lambda, \beta) = AX(\lambda+\tau_1, \beta) + BX(\lambda-\tau_1, \beta) + AY(\lambda+\tau_1, \beta) + BY(\lambda-\tau_1, \beta) + CX(\lambda+\tau_2, \beta) + DX(\lambda-\tau_2, \beta) - CY(\lambda+\tau_2, \beta) - DY(\lambda-\tau_2, \beta) + F(\lambda, \beta); \quad (5\text{-}98)$$
$$Y(\lambda, \beta) = AX(\lambda+\tau_1, \beta) + BX(\lambda-\tau_1, \beta) + AY(\lambda+\tau_1, \beta) + BY(\lambda-\tau_1, \beta) + DY(\lambda-\tau_2, \beta) + CY(\lambda+\tau_2, \beta) - CX(\lambda+\tau_2, \beta) - DX(\lambda-\tau_2, \beta) + G(\lambda, \beta), \quad (-\infty < \lambda < \infty),$$

где $Y(\lambda,\ \beta) = y^{(0)}(\lambda,\ \beta)\exp(az_1)$; $X(\lambda,\ \beta) = x^{(2)}(\lambda,\ \beta)\exp(-az_1)$; $a = \sqrt{\lambda^2+\beta^2}$; $a(\pm j) = \sqrt{(\lambda \pm \tau_j)^2 + \beta^2}$, $j = 1,\ 2$; $A = -\dfrac{p^{(0)}\varepsilon_1\,[a^2(+1) - \tau_1(\lambda+\tau_1)]}{2(a + p^{(0)}a^2)}$; $B = -\dfrac{p^{(0)}\varepsilon_1\,[a^2(-1) + \tau_1(\lambda-\tau_1)]}{2(a + p^{(0)}a^2)}$;

$$C=\frac{q^{(0)}\varepsilon_2\left[a^2(+2)-\tau_2(\lambda+\tau_2)\right]}{2(a-q^{(0)}a^2)};\quad D=\frac{q^{(0)}\varepsilon_2\left[a^2(-2)+\tau_2(\lambda-\tau_2)\right]}{2(a-q^{(0)}a^2)};$$

$$F(\lambda,\ \beta)=Aa(\lambda+\tau_1,\ \beta)\,e^{-a(+1)z_1}+Ba(\lambda-\tau_1,\ \beta)\,e^{-a(-1)z_1}-$$

$$-Ca(\lambda+\tau_2,\ \beta)\,e^{-a(+2)z_1}-Da(\lambda-\tau_2,\ \beta)\,e^{-a(-2)z_1}+$$

$$+0{,}5\left[\frac{1-p^{(0)}a}{1+p^{(0)}a}-\frac{1+q^{(0)}a}{1-q^{(0)}a}\right]a(\lambda,\ \beta)\,e^{-az_1};$$

$$G(\lambda,\ \beta)=Aa(\lambda+\tau_1,\ \beta)\,e^{-a(+1)z_1}+Ba(\lambda-\tau_1,\ \beta)\,e^{-a(-1)z_1}+$$

$$+Ca(\lambda+\tau_2,\ \beta)\,e^{-a(+2)z_1}+Da(\lambda-\tau_2,\ \beta)\,e^{-a(-2)z_1}+$$

$$+0{,}5\left[\frac{1-p^{(0)}a}{1+p^{(0)}a}+\frac{1+q^{(0)}a}{1-q^{(0)}a}\right]a(\lambda,\ \beta)\,e^{-az_1}.$$

Здесь функция $a(\lambda,\ \beta)$ определяет поле диполя:

$$a(\lambda,\ \beta)=[1/(2\pi)]\left[i\,\frac{\lambda+i\beta}{a}\,b_1-i\,\frac{a}{2(\lambda+i\beta)}\,b_{-1}+b_0\right]\times$$

$$\times\exp(az_0-i\lambda x_0-i\beta y_0),\quad \mathbf{r}_1(x_0,\ y_0,\ z_0);$$

$b_1=-[1/(8\pi)](\mathbf{M}_x-i\mathbf{M}_y)$; $b_{-1}=[1/(4\pi)](\mathbf{M}_x+i\mathbf{M}_y)$; $b_0=\mathbf{M}_z/(4\pi)$; $\mathbf{M}_1(\mathbf{M}_x,\ \mathbf{M}_y,\ \mathbf{M}_z)$ — составляющие момента диполя $D[\mathbf{M}_1,\ \mathbf{r}_1]$.

Полученная система уравнений в форме (5-98) может быть реализована численно методом последовательных приближений. Понятно, что система (5-98) значительно упрощается, если экран S проводит электрический ток и является немагнитным ($p^{(0)}=0,\ q^{(0)}\neq 0$) [1].

Помимо рассмотренных зависимостей для p и q, могут быть использованы зависимости по двум поверхностным координатам x и y:

$$\begin{aligned} p&=p^{(0)}[1+2\varepsilon_1\cos\tau_1 x+2\varepsilon_3\cos\tau_3 y];\\ q&=q^{(0)}[1+2\varepsilon_2\cos\tau_2 x+2\varepsilon_4\cos\tau_4 y], \end{aligned}\qquad(5\text{-}99)$$

что приводит к более сложным системам уравнений.

Разрешая систему уравнений (5-98), вычислим коэффициенты $y^{(0)}(\lambda,\beta)$, $x^{(2)}(\lambda,\beta)$, на основании которых определим экранирующие функции по выражениям (1-75) и (1-81).

Более полные сведения о расчете функций плоских экранирующих систем с поверхностными переменными электромагнитными параметрами, а также аналогичных сферических и круговых цилиндрических систем могут быть получены из работы [2].

ГЛАВА ШЕСТАЯ

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПРОЕКТИРОВАНИЮ ЭКРАНИРУЮЩИХ ОБОЛОЧЕК

6-1. ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОДНОСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК

Общие рекомендации.

1. При экранировании напряженности низкочастотных электромагнитных полей небольшой амплитуды целесообразно использовать либо ферромагнитные оболочки, либо немагнитные, но с высокой электрической проводимостью.

При использовании в качестве экранов ферромагнитных оболочек полезны следующие рекомендации:

должна обеспечиваться высокая магнитная проницаемость материала, желательно применение магнитомягких материалов, для повышения начальной магнитной проницаемости рекомендуется использовать подмагничивание;

толщина оболочки должна быть достаточно велика, чтобы обеспечить минимальное магнитное сопротивление материала экрана; не рекомендуется выбирать длинные конструкции экранов;

расстояния между экраном и магнитопроводами других элементов должны быть наибольшими, чтобы магнитное сопротивление внешней среды было большим по сравнению с магнитным сопротивлением экрана.

С увеличением частоты возрастает роль вихревых токов в оболочке. Происходит вытеснение магнитных силовых линий к поверхностному слою. Повышенная магнитная проводимость оболочки теряет свое значение. Экран превращается в электромагнитный. Эффективнее могут оказаться в таком случае немагнитные оболочки с высокой электрической проводимостью. При этом можно рекомендовать:

в качестве материала экрана применять хорошо проводящие электрический ток материалы с целью уменьшения общего сопротивления;

применением тонкостенных оболочек можно достичь при снижении массо-габаритных показателей достаточно высокой эффективности экранирования.

2. При экранировании многополюсного электрооборудования необходимо применять оболочки из ферромагнитных материалов. Это следует делать из следующих соображений. Экранирующее действие ферромагнитных оболочек определяется не только макроскопическими токами, протекающими в его стенках, но и намагниченностью материала. Оболочка образует из магнитных силовых линий путь с малым сопротивлением, и величина магнитного потока, проходящего внутрь, зависит от

магнитного сопротивления материала оболочки. Увеличение числа полюсов источника магнитного поля приводит к возрастанию экранирующего действия ферромагнитной оболочки. Экранирующее действие немагнитных оболочек обусловлено реакцией вихревых токов, протекающих в материале оболочек под действием поля. С изменением числа полюсов источника магнитного поля изменяется и число эквивалентных контуров, образуемых вихревыми токами в материале оболочек. При этом изменяются сопротивление и индуктивность контуров, что приводит к изменению фазы между магнитными потоками в материале оболочек, к возрастанию результирующей составляющей напряженности магнитного поля.

3. Выбор толщины стенок проводящего электрический ток ферромагнитного экрана нельзя сделать однозначным. Оптимальная толщина стенок определяется материалом экрана, частотой магнитного поля и заданной эффективностью экранирования. При этом необходимо учитывать следующее:

при повышении частоты поля магнитная проницаемость материалов падает и вызывает снижение экранирующих свойств этих материалов, так как по мере снижения магнитной проницаемости возрастает сопротивление магнитному потоку, оказываемое экраном. Как правило, уменьшение магнитной проницаемости с повышением частоты идет наиболее интенсивно у ферромагнитных материалов с наибольшей начальной магнитной проницаемостью $\mu_{нач}$. Например, листовая электротехническая сталь с малой проницаемостью $\mu_{нач}$ мало изменяет магнитную проницаемость μ с повышением частоты, а пермаллой, имеющий большие значения $\mu_{нач}$, весьма чувствителен к повышению частоты поля;

в ферромагнитных материалах, подверженных действию высокочастотного магнитного поля, заметно проявляется поверхностный эффект, т. е. вытеснение магнитного потока к поверхности стенки экрана. В таких условиях целесообразно увеличивать толщину стенок экрана, чтобы снизить магнитное сопротивление экрана даже при наличии поверхностного эффекта. При этом одновременно следует учитывать и изменение магнитной проницаемости.

4. При расчете экранов, находящихся вблизи мощных источников помех, необходимо учитывать изменение динамической магнитной проницаемости в зависимости от индукции, а также мощности потерь в экране.

5. Экранирующая оболочка характеризуется двумя взаимосвязанными функциями: эффективностью экранирования и функцией обратного действия, которые могут быть определены одна из другой. Поэтому при проектировании экрана обе эти функции необходимо рассматривать совместно, чтобы получить представление о процессах экранирования исследуемой оболочки и выбрать оптимальную конструкцию.

6. Форма оболочки сравнительно мало влияет на ее экранирующие функции. Решающее значение имеют электрическая проводимость γ, магнитная проницаемость μ и толщина Δ.

7. Электромагнитный экран, как правило, представляет собой линейную систему, поэтому для него справедлив принцип взаимности. Место расположения источника не влияет на экранирующие функции. Это положение имеет большое практическое значение, так как при изучении эффективности экранирования позволяет ограничиться одним из случаев расположения источника поля.

8. При использовании экрана в статическом режиме необходимо учитывать обе границы отражения: диэлектрик — экран и экран — диэлектрик. Для низких частот ($f < 10^4$ Гц) затуханием энергии в поперечном сечении экрана можно пренебречь.

9. Экранирующие оболочки и конструкции необходимо заземлять, особенно в транспортных энергоустановках, так как в противном случае сама оболочка может явиться источником помехонесущего электромагнитного поля нежелательного частотного диапазона, заземление необходимо также для обеспечения безопасности персонала.

10. При проектировании экрана необходимо установить характеристики источников помехонесущих магнитных полей. Метод расчета параметров оболочек выбирается в зависимости от характера магнитного поля.

Увеличение эффективности экранирования.

Стабилизирование магнитного состояния материала экрана. Если по конструктивным, технологическим или экономическим причинам нет возможности увеличивать толщину экранирующих оболочек, можно рекомендовать встряхивание ферромагнитного материала дополнительно приложенным переменным магнитным полем. Таким образом стабилизируя магнитное состояние материала, можно достичь увеличения эффективности экранирования без увеличения расхода материала. Благодаря встряхиванию материала экранирующей системы относительно высоким переменным магнитным полем можно увеличить эффективную магнитную проницаемость материала. Физическая картина процесса встряхивания до конца не проанализирована, однако есть предположения, что встряхивающее поле держит домены материала в движении и таким образом предотвращает их замораживание на поврежденных участках кристаллической решетки.

Для осуществления процесса встряхивания материала экранирующей системы переменным магнитным полем должны устанавливаться обмотки, охватывающие экранирующие оболочки (рис. 6-1), в которые от специального источника подаются токи определенной амплитуды и частоты. В процессе встряхивания амплитуда и частота подаваемых в обмотки токов может изменяться. В некоторых случаях полезным окажется встряхивание переменным током с убывающей амплитудой и частотой.

Увеличения экранирующей способности ферромагнитных экранов можно достичь, используя безгистерезисное намагничивание ферромагнетиков. Такая кривая получается при одновременном воздействии на материал слабого постоянного (или медленно меняющегося) магнитного поля и сильного переменного поля с убывающей амплитудой. Можно считать, что рассмотренные процессы дополняют друг друга и приводят к улучшению эффективности экранирования.

Увеличение магнитной проницаемости материала экрана. Увеличения магнитной проницаемости материала экрана можно достичь подмагничиванием [13]. Подмагничивание осуществляется переменным током низкой частоты или постоянным током по схеме, аналогичной изображенной на рис. 6-1. Благодаря подмагничиванию материала экрана кривые переходят по кривой намагничивания в зону с более высокими магнитными проницаемостями. Увеличением магнитной проницаемости можно достичь значительного увеличения экранирующего эффекта. Желательно, чтобы предварительно материал экрана был намагничен однородно.

Выбор формы и материала экрана. Конструктивная форма экрана сравнительно мало влияет на его эффективность экранирования. Решающее значение имеет материал, из которого изготовлен экран, толщина Δ и радиус R.

Выбор формы экрана зависит от конструктивных и технологических причин, а также от необходимости получить максимальную эффективность экранирования. Немаловажной является возможность получения однородного поля за пределами экранирующей оболочки. При выборе формы экрана необходимо учитывать следующее:

1. Если оболочки ограничены традиционными поверхностями (сферическими, круговыми цилиндрическими и плоскими), то

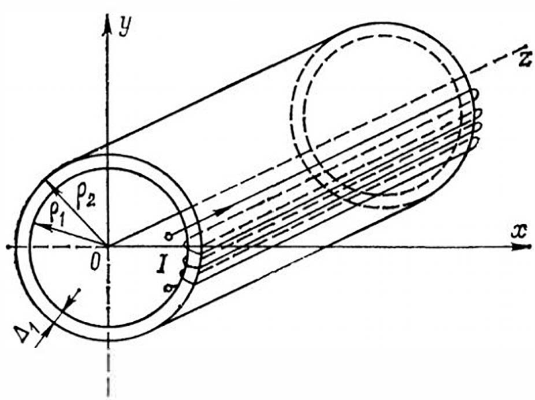


Рис. 6-1. Цилиндрический экран с подмагничивающей обмоткой

при переменном помехонесущем электромагнитном поле соотношения их эффективности экранирования (при равенстве толщины их стенок и величины радиусов) следующие:

$$Э^{c(1)} : Э^{ц(1)} : Э^{п(1)} = 3 : 2 : 1 - \text{при } \nu_{1,0} \gg 1; \quad \gamma \approx 0;$$

$$Э^{c(1)} : Э^{ц(1)} : Э^{п(1)} = 1 : 1{,}5 : 3 - \text{при } \nu_{1,0} = 1, \quad \gamma > 0.$$

То, что эффективность экранирования таких различных типов экранов, как цилиндрический и плоский, различается лишь множителем два, дает возможность заключить, что, например, длинный экран с прямоугольным сечением может явиться наиболее близким по эффективности к обоим указанным выше идеальным типам экранов. Если размеры прямоугольного сечения одинаковы, то для расчета могут быть применены формулы цилиндрического экрана. При увеличении одной из сторон этого сечения перейдем к формулам для плоского экрана. При этом эффективность экранирования будет различаться не более чем в два раза.

Малое влияние формы экрана на эффективность экранирования позволяет в практике расчета и конструирования экранов, а также при определении эффективности существующих экранов применять формулы для расчета эффективности экранирования плоскостью, цилиндром и сферой к расчету эффективности экранов, близких к ним по форме.

2. Если напряженность помехонесущего магнитного поля является однородной, то однородную напряженность поля за экраном можно получить при использовании экранов сферической, сфероидальной (при направлении напряженности поля параллельно оси), круговой цилиндрической и плоской формы. При расчете параметров экранов другой формы необходимо иметь в виду различную степень неоднородности магнитного поля. Аналогичный вывод можно сделать и в отношении однородного магнитного поля.

3. Если появляется необходимость создания цилиндрических экранов с прямоугольным сечением, то следует помнить, что наибольшей эффективностью экранирования обладает цилиндр с квадратным сечением. Точно так же предпочтительным оказывается кубический экран по сравнению с другими замкнутыми экранами прямоугольного сечения.

4. Экран по возможности должен быть замкнутым для обеспечения лучшей эффективности экранирования.

Замкнутый экран, выполненный из материала с высокими магнитной проницаемостью μ и электрической проводимостью γ и обладающий достаточной толщиной Δ, казалось бы, должен удовлетворять требованиям инженерной практики. Однако этого для многих задач недостаточно. Иногда экранирующие оболочки должны удовлетворять, кроме обеспечения высокой эффективности экранирования, дополнительным требованиям: продолжительности жизни, гальванической совместимости и механической прочности. Продолжительность жизни экранирующей оболочки зависит от свойств среды, в которой он работает: от температуры, давления, агрессивности среды (склонности к коррозии). Гальваническая совместимость важна при использовании многослойного или составного экрана и зависит от нахождения металлов в потенциальном ряду. Под механической прочностью экранов понимается способность к сжимаемости и растяжению без нарушения механических свойств.

При выборе ферромагнитных материалов следует руководствоваться следующим:

для увеличения эффективности экранирования необходимо выбирать материалы с высоким значением статической магнитной проницаемости;

минимальная толщина стенок во избежание потери экранирующих свойств должна выбираться исходя из того, чтобы материал при максимальных значениях напряженности магнитного поля не насыщался.

Учет нелинейности характеристик материала экрана.

В ферромагнитных экранах магнитная проницаемость материала μ как функция напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$ может изменяться в широких пределах, что приводит к необходимости учета характера изменения μ в стенке экрана и, следовательно, нелинейности характеристики материала экрана. Напряженность магнитного поля $\mathbf{H}$ в стенках экрана является функцией координат. Амплитуда напряженности изменяется как по мере проникновения поля в глубь стенки экрана (по координате q_1), так и по поверхности (по координатам q_2 и q_3). При этом магнитная проницаемость μ в стенке экрана, являясь функцией амплитуды напряженности $\mathbf{H}$, будет также функцией координат. Нелинейность зависимости $\mu(\mathbf{H})$ приводит к тому, что периодические кривые напряженности $\mathbf{H}$ и индукции $\mathbf{B}$ будут содержать высшие гармоники. Последними можно пренебречь как второстепенным фактором по сравнению с нелинейностью процесса, связанного с изменениями амплитуды напряженности магнитного поля. При этом допущении периодические кривые функций $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$ можно заменить эквивалентными синусоидами, в качестве которых выбираются первые гармоники этих кривых. Потери на гистерезис, определяющие угол фазового сдвига между эквивалентными синусоидами и $\mathbf{H}$, можно, в первом приближении, не учитывать. Таким образом, μ в каждой точке экрана можно определять по основной кривой намагничивания материала экрана как функцию амплитуды напряженности $\mathbf{H}$. Введение в уравнения, описывающие электромагнитное поле, μ как некоторой функции $\mathbf{H}$ приводит к необходимости решать нелинейную задачу, которую можно свести к линейной для слоистого экрана с постоянной проницаемостью μ в слое. Значения μ при этом подбираются так, чтобы соответствовать по основной кривой намагничивания средним значениям напряженности $\mathbf{H}$ в слоях экрана.

Задача определения значений μ отдельных слоев, на которые разбит экран, решается последовательными приближениями, так как для вычисления значений амплитуды напряженности $\mathbf{H}$ внутри экрана, по которым из кривой намагничивания определяется проницаемость μ слоев, необходимо задаться значениями μ. Экран рекомендуется разбивать на равные по толщине слои. Если выбирать толщину слоев ме́ньшей в области быстрого изменения μ и бо́льшей в области ее медленного изменения, можно добиться той же точности учета при ме́ньшем числе слоев по сравнению с делением на слои равной толщины. Критерием выбора толщины слоя можно принять величину $\Delta\mu = |\mu_{k-1} - \mu_k|$, $k = 1, \ldots, n$ (n — число слоев). Толщина слоя выбирается так, чтобы $\Delta\mu \leqslant \Delta\mu_{max}$, где $\Delta\mu_{max}$ — заданное значение. Если это условие выполняется, то такой слой далее не дробится. При выборе числа слоев необходимо определить, проходит ли кривая изменения проницаемости μ при изменении толщины экрана через свое максимальное значение.

Итерационный процесс строится следующим образом. Если экран разделен на n слоев, то задаются начальными значениями $\mu^{(0)}$ в каждом слое и производят расчет модуля амплитуды $\mathbf{H}_{mk}^{(0)}$ ($k = 1, \ldots, n$) на каждой поверхности. Затем по средней напряженности на границах слоя определяют из кривой намагничивания новое значение $\mu^{(1)}$. Полученное $\mu^{(1)}$ сравнивается с $\mu^{(0)}$. Если разность между ними превосходит заданную точность расчета ε, то значение μ слоя уточняется. Магнитная проницаемость $\mu^{(1)}$ принимается равной среднему арифметическому предыдущего $\mu^{(0)}$ и первого из полученных значений $\mu^{(1)}$. Таким образом определяется $\mu^{(1)}$, и расчет $\mathbf{H}$ повторяется сначала. Аналогично получают второе, третье и т. д. приближения, и так продолжают до тех пор, пока вновь полученное значение μ будет отличаться от предыдущих значений не более чем на ε.

6-2. ПРОЕКТИРОВАНИЕ МНОГОСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК

Общие рекомендации.

1. При экранировании магнитной напряженности низкочастотных электромагнитных полей большой интенсивности необходимо применять многослойные экраны как с целью повышения эффективности экранирования, так и с целью более рационального их конструирования (уменьшения массы и габаритов).

2. Слои из ферромагнитного и немагнитного материалов, составляющие многослойный экран, желательно чередовать. Чередование слоев с разными волновыми сопротивлениями приводит к многократному отражению напряженности помехонесущих магнитных полей и интенсивному поглощению энергии поля в поперечном сечении стенок.

3. Должны быть выдержаны определенная толщина стенок и оптимальные расстояния между ними. Эффективность экра-

нирования многослойным экраном достигает максимального значения в случаях, когда толщина стенок и промежутки между экранами увеличиваются пропорционально от центра экрана. Величина каждого промежутка является средней геометрической величиной толщины стенок, примыкающих к нему слоев.

4. С целью уменьшения потерь, вносимых многослойным экраном в экранируемую цепь, в качестве материала слоя, обращенного к экранируемой цепи, используются хорошо проводящие электрический ток немагнитные материалы.

5. Наиболее точным и информативным методом, позволяющим получить оптимальную эффективность экранирования многослойным экраном, является метод, основанный на решении уравнений Максвелла. С развитием вычислительной техники такие недостатки этого метода, как трудоемкость вычислений, необходимость в применении интегральных преобразований и т. д., уменьшаются. Когда точность решения не является существенной и качественные характеристики являются достаточными, при расчете эффективности экранирования можно пользоваться методом цепей и теорией длинной линии.

6. Рекомендуется использовать многослойные проводящие электрический ток ферромагнитные экраны. Их действие не сводится к простому ослаблению напряженности внешних помехонесущих магнитных полей, а приводит к существенному уменьшению неоднородности поля в полости экрана.

При одновременном использовании многослойного пассивного и активного экранирования (компенсационных обмоток) пассивный экран во многом определяет возможность подавления магнитных полей в системе активного экранирования, делая более однородным поле помех в зоне действия активного экрана.

7. Если задаться экранирующими функциями по отдельным гармоникам поля, интересующим нас при решении задач электромагнитной совместимости, хотя бы для двух различных периодов, можно по формулам гл. 2—4 получить системы уравнений, позволяющие найти нужные параметры: Δ_j, γ_j, μ_j (j — номер слоя). Зная последние два ряда гармоник, можно поставить задачу о проектировании многослойного экрана с оптимальными свойствами.

Увеличение степени однородности поля в полости многослойной оболочки. Иногда необходимо получить в полости системы экранирующих оболочек высокую степень однородности поля. Достигнув ее и используя систему компенсационных обмоток, можно обеспечить высокий «магнитный вакуум», который необходим для совершенствования техники измерений слабых биомагнитных полей на фоне внешних помех.

Увеличить степень однородности магнитного поля в полости системы экранирующих оболочек можно несколькими способами:

использованием многослойного экрана, ограниченного полной координатной поверхностью (сферой, сфероидом, круговым цилиндром и т. д.), состоящего из чередующихся тонких ферромагнитных и немагнитных слоев; слои могут разделяться воздушными промежутками и размещаться концентрично; степень однородности поля в полости оболочек увеличивается по мере увеличения числа слоев; наибольшей эффективности в выравнивании поля таким способом можно достичь в режиме магнитостатики ($\omega \to 0$);

при использовании многослойного экрана с эксцентрическим расположением слоев можно достичь заданной степени однородности поля в полости меньшим числом слоев, чем при их чередовании [2]; кроме того, благодаря изменению эксцентриситета отдельных слоев можно варьировать эффективность экранирования системой оболочек; высокой степени однородности поля в полости можно достичь при наличии двух ферромагнитных слоев, размещенных эксцентрически;

использованием многослойного экрана, составленного из неоднотипных оболочек (сферического и сфероидального, кругового цилиндрического и сфероидального и т. д.); иногда достаточным оказываются два слоя [2];

использованием ферромагнитного экрана с высокой степенью анизотропии магнитной проницаемости материала экрана по поверхности и по толщине; такой экран представляет собой оптимальную модель многослойного экрана и обладает свойством подавления высших гармоник внешнего магнитного поля в гораздо более высокой степени, чем первой гармоники поля, тем самым создавая в полости экрана магнитное поле высокой степени однородности.

Влияние экранирующих оболочек на структуру внешнего поля. Структура электромагнитного поля за пределами экранирующих оболочек, в полости которых находится его источник, во многом определяется формой и размерами оболочек.

Источник электромагнитного поля самой сложной конфигурации может быть представлен набором магнитных или электрических диполей [1]. Относительно геометрического центра экранирующей системы источник поля представляется набором мультиполей: диполем, квадруполем, октуполем и т. д. На каждый из этих мультиполей система экранирующих оболочек действует по-разному. Кроме того, затухание напряженностей полей мультиполей происходит обратно пропорционально эффективности экранирования $Э_n^{s\,(j)} R^{n+1}$, где R — расстояние от места расположения мультиполя до точки его наблюдения, n — порядок мультиполя, $Э_n^{s\,(j)}$ — эффективность экранирования n мультиполя S оболочкой с j слоями. Учитывая это, можно отметить:

на разных расстояниях от системы оболочек, в которых находится источник магнитного поля, он наблюдается по-разному; при $R \to \infty$ самое сложное поле будет определяться как созданное лишь одним диполем, расположенным в центре координатной системы;

всегда можно так спроектировать экранирующую систему оболочек, что во внешнем магнитном поле будет отсутствовать желаемый набор мультиполей.

Учитывая затухание напряженностей поля при удалении от геометрического центра, относительно которого ориентирован источник, например дипольный $D[\mathbf{M}, \mathbf{r}]$, где $\mathbf{r}$ — расстояние от места расположения источника до геометрического центра, можно отметить [1]:

поле дипольного источника, смещенного относительно геометрического центра, на расстояниях $R > 20r$ наблюдается как поле центрального диполя;

при $R \approx 10r$ то же поле наблюдается как поле центрального диполя и квадруполя;

при $R < 10r$ поле смещенного от центра дипольного источника наблюдается как поле бесконечного набора мультиполей, начиная от дипольного, квадрупольного, октупольного и т. д.

Если использовать систему экранирующих оболочек с центром в уже заданном геометрическом центре, то можно изменить структуру внешнего поля. Наиболее перспективной может оказываться экранирующая система из двух ферромагнитных оболочек, ограниченных координатными поверхностями (сферическая, сфероидальная и т. д.), размещенных эксцентрически [2]. Такая система не только уменьшит расстояния, на которых источник магнитного поля проявляется различным набором мультиполей, но и позволит, используя смещение центров оболочек относительно друг друга, осуществлять изменения мультипольного состава источника поля, например в режиме слежения.

6-3. ПРОЕКТИРОВАНИЕ НЕОДНОРОДНЫХ ОБОЛОЧЕК

Оболочки с геометрическими неоднородностями.

Незамкнутые экраны. Непрерывность экрана нарушается в основном на стыках сопрягаемых деталей. Эти стыки можно разделить на физически однородные и неоднородные. Физически однородными можно считать стыки, которые не мешают прохождению магнитных силовых линий. Благодаря этому не увеличивается магнитное сопротивление экрана и не ухудшаются его экранирующие свойства. Физически неоднородные стыки образуются при монтаже экрана винтами, заклепками, сваркой и т. д., когда соединение не является непрерывным и между соединяемыми деталями образуются изгибы, выступы и другие неровности, создающие щели, способные пропускать электромагнитное поле на некоторых частотах.

Физическую неоднородность можно уменьшить различными способами. Если соединение неразъемно, желательно выполнить

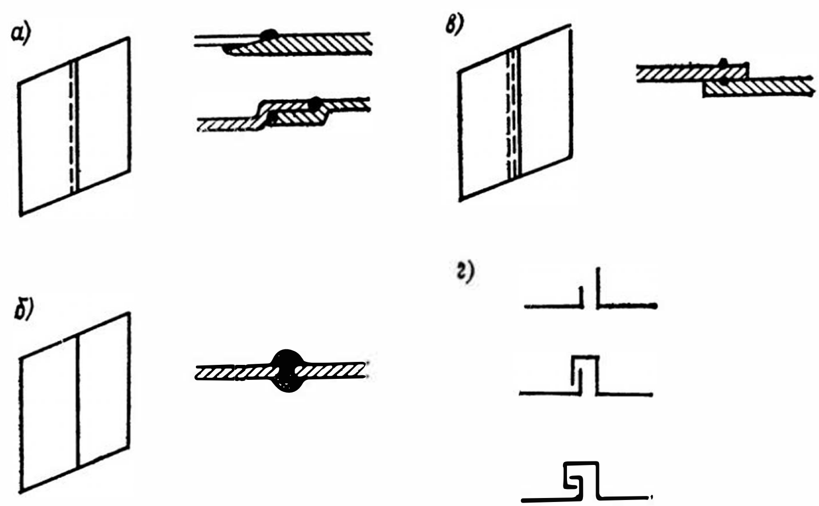


Рис. 6-2. Способы уменьшения физической неоднородности соединений

сваркой однородный шов по краям соединяемых деталей, который не должен иметь сквозных трещин (рис. 6-2, *а—в*). Однако если электрическая проводимость или магнитная проницаемость наваренного металла гораздо меньше, чем у материала экрана, то эффективность экранирования ухудшается. Неразъемный обжимаемый шов (рис. 6-2, *г*) не требует сварки или пайки, но перед его обжатием необходимо зачистить поверхности соединяемых деталей.

К незамкнутым экранам можно отнести конечные круговые цилиндрические оболочки с размерами $l \approx D_0$ (l — длина, D_0 — средний диаметр цилиндра). При их конструировании следует руководствоваться следующим [29]:

для увеличения эффективности экранирования как параллельных, так и перпендикулярных магнитных полей необходимо выбирать материал с высоким значением статической магнитной проницаемости;

минимальная толщина стенок во избежание потери экранирующих свойств должна выбираться исходя из того, чтобы материал при значениях максимальной напряженности $\mathbf{H}_{l\,\max}$ внешнего поля не входил в область магнитного насыщения, для этого необходимо соблюдать условия:

$$\mathbf{H}_{l\,\max} < 4N_2(\Delta/D_0)(\mathbf{B}_s/\mu_0) \text{ — для параллельного поля;}$$

$$\mathbf{H}_{l\,\max} < (\Delta/D_0)(\mathbf{B}_s/\mu_0) \text{ — для перпендикулярного поля,}$$

где N_2 — размагничивающий коэффициент, $\mathbf{B}_s$ — индукция насыщения, Δ — толщина экрана; из этих условий следует, что продольное насыщение наступает в более слабых полях вследствие малых величин N_2, поэтому для повышения эффективности экрана при выборе отношения Δ/D_0 необходимо исходить из заданной частоты;

длина цилиндрического экрана выбирается исходя из получения максимальной эффективности экранирования: если для перпендикулярных магнитных полей выбор ее очевиден (с увеличением l растет эффективность экранирования) и ограничен лишь конструктивными соображениями, то для продольных полей существует оптимальное отношение l/D_0, при котором эффективность экранирования максимальна (при заданных Δ/D_0 и материале экрана);

при соответствующем выборе материала и геометрических размеров можно получить максимальную эффективность экранирования, если устранить влияние остаточной намагниченности материала экрана путем размагничивания цилиндра переменным током убывающей амплитуды.

Замкнутые экраны со слабой поверхностной неоднородностью. В инженерных задачах иногда приходится рассчитывать параметры деформированных оболочек или спроектированных с заданными отклонениями от опорной оболочки, под которой понимается срединная оболочка, ограниченная координатной поверхностью.

Расчет таких оболочек осуществляется с учетом неоднородности поверхности оболочки в самих граничных условиях. Граничные условия для неоднородных по форме ферромагнитных оболочек получены в работе [18] из векторной формы граничных условий для тонких оболочек с использованием теории возмущений [5]. Эта теория хорошо применима, если рассматриваемая задача близка к той, которая может быть решена точно. Предполагается при этом, что изменения формы граничной поверхности не носят сингулярного характера.

Решение краевой задачи в этом случае сводится, как и для оболочек, изготовленных из материалов с неоднородными магнитной проницаемостью и электрической проводимостью, к бесконечной системе алгебраических уравнений. В результате в поле за экранирующей оболочкой набор пространственных гармоник будет иным, чем в исходном поле: появятся гармоники более высокой степени и порядка, чем в исходном поле. Поэтому при проектировании оболочек со слабой поверхностной неоднородностью необходимо считаться с появлением гармоник, отличных от содержащихся в исходном поле. Если такие гармоники желательно исключить, то должны быть предусмотрены специальные меры: неоднородности в электромагнитных параметрах материала или необходимый эксцентриситет при использовании многослойных экранирующих оболочек.

Оболочки с электромагнитными неоднородностями. Экранирующие функции оболочек можно варьировать, достигая высокой степени однородности поля в полости экрана, если использовать материалы с переменными электрической проводимостью γ и магнитной проницаемостью μ, при этом:

1. Использование тонкостенных оболочек с переменными μ и γ по поверхности приводит к появлению в возбужденных оболочкой полях гармоник более высокой степени и порядка, которые затухают значительно быстрее при изменении расстояния, чем гармоники низкой степени и порядка. При проектировании оболочек с заданными экранирующими функциями (в частности, для отдельных гармоник) можно рекомендовать задаваться набором возможных законов изменения μ и γ по поверхности оболочки и из результатов расчета устанавливать желаемый закон изменения μ и γ. Принципиальных трудностей при этом не встречается.

2. Использование толстостенных оболочек позволяет задаваться изменением параметров μ и γ при изменении толщины и рассчитывать экраны, обеспечивающие необходимые уменьшения исходного поля по амплитуде и по фазе. Если известны амплитуда и фаза, по крайней мере, для двух гармоник различных периодов, то, используя эти значения, получаем систему уравнений, позволяющую найти толщину экрана, параметр затухания, а также электрическую проводимость и магнитную проницаемость.

3. В отдельных случаях можно рекомендовать использование анизотропных экранов (с определенными магнитной проницаемостью и электрической проводимостью по поверхности и толщине). Такие экраны обладают свойствами подавления высших пространственных гармоник в помехонесущих электромагнитных полях по составляющим напряженности, тем самым создавая в полости экрана поле с составляющими напряженности высокой степени однородности.

Сетчатые и решетчатые оболочки. При проектировании экранирующих оболочек иногда предпочтение следует отдать сетчатым и решетчатым оболочкам. Решетчатые оболочки имеют некоторые преимущества по сравнению со сплошными: улучшенный теплообмен с внешней средой, возможность визуального наблюдения за техническим состоянием электрооборудования в процессе эксплуатации и более удобного его ремонта.

Следует помнить, что некоторые погрешности, свойственные сетчатым экранирующим оболочкам, практически не поддаются учету: неоднородности падающего поля, соизмеримые с размерами ячеек; недостаточно строгий учет сопротивления контактов и т. д. Возникновение таких погрешностей может быть оценено лишь при решении инженерных задач. Правильность же применимости тех или иных допущений может быть установлена при конструкторских проработках конкретных устройств.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

ОБЕСПЕЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ СОВМЕСТИМОСТИ ЭЛЕКТРООБОРУДОВАНИЯ

7-1. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ОБСТАНОВКА В ЭНЕРГЕТИЧЕСКОМ ПОМЕЩЕНИИ

В энергетическом помещении по условиям проектирования и эксплуатации размещается разнородное электрооборудование. Это прежде всего силовое электрооборудование, являющееся источником как постоянных магнитных полей, так и переменных электромагнитных полей широкого частотного спектра: электрические машины, кабели, распределительные щиты, трансформаторы, статические преобразователи, работающие в выпрямительном и в инверторном режимах. Здесь же размещается и слаботочное электрооборудование: пульты управления, системы автоматики, информационные линии, приборы и счетно-вычислительные комплексы, блоки электроники и радиотехническое оборудование. Это оборудование в основном выполняет функции приемника (рецептора) электромагнитных полей. В ряде случаев один и тот же элемент электрооборудования может быть как источником поля, так и рецептором. В результате перекрестного влияния электромагнитных полей разнородного радио- и электротехнического оборудования в энергетическом помещении создается помехонесущее поле, обладающее магнитной и электрической напряженностью. Значение и фазовая направленность этой напряженности определяется числом и интенсивностью источников электромагнитных полей; размерами помещения, в которых размещается электрообрудование; материалами, из которых изготовлены элементы электрооборудования. Очевидно чем ближе расположено оборудование относительно друг друга, чем меньше размеры помещения, тем больше напряженность электромагнитного поля. Вот почему в транспортных энергоустановках (на судах, на железнодорожном транспорте и т. д.), где размеры энергетических помещений лимитированы, напряженность помехонесущих электромагнитных полей может быть велика. А значит, велико и влияние на рецепторы. Из-за большой проницаемости оболочки энергетического помещения электромагнитное поле может выходить за пределы транспортного средства в окружающую среду. Следовательно, необходимо рассматривать две области распространения поля, рассеиваемого электрооборудованием: внутри энергетического помещения (ближнее поле) и за пределами помещения (дальнее поле). Дальнее поле затрагивает, в основном, экологические проблемы. Ближнее поле определяет электромагнитную обстановку в энергетическом помещении.

Влияние напряженности поля внутри энергетического помещения на рецепторы проявляется как непосредственно (проникновением через неплотности в уплотнениях, через отверстия и щели, без которых невозможно обойтись при создании конструкций электрооборудования), так и косвенно (путем наведения в линиях связи и в элементах систем автоматики электродвижущих сил и токов, приводящих к повреждениям или к ложным срабатываниям). Дополнительно отметим, что внешние электромагнитные поля отрицательно воздействуют на биологические функции обслуживающего персонала. Возникает проблема электромагнитной совместимости электро- и радиотехнического оборудования, а также обслуживающего персонала.

Значимость проблемы электромагнитной совместимости применительно к транспортным энергоустановкам со временем будет возрастать из-за непрерывного роста энерговооруженности, применения новых типов электрооборудования (например, сверхпроводящих электрических машин или магнитогидродинамических), увеличения насыщенности энергетических помещений всеми видами электрооборудования, снижения экранирующих свойств конструктивных элементов оболочек транспортных объектов, снижения надежности работы систем автоматических устройств и вычислительной техники в условиях воздействия помехонесущих полей.

Успехи в решении проблемы электромагнитной совместимости могут быть достигнуты, если проектировщики получат обоснованную теорию расчета напряженности электромагнитного поля и будут разработаны методы снижения напряженности до требуемых значений.

Теория расчета напряженности суммарного электромагнитного поля должна позволить установить структуру поля, величины и фазовые углы напряженности, зоны максимальной интенсивности. При этом математический аппарат должен обеспечить расчеты напряженности поля в дальней зоне аналогично методам расчета напряженности в ближней зоне.

В настоящее время напряженность внешних электромагнитных полей отдельных элементов электрооборудования определяют с большой точностью: разработаны как аналитические, так и экспериментальные методы [1]. А вот напряженность суммарного поля, определяющая электромагнитную обстановку в энергетическом помещении, рассчитывается недостаточно точно, поскольку при расчетах не учитывается взаимовлияние полей близко расположенных источников из-за значительных аналитических трудностей.

Таким образом, электромагнитную обстановку в помещении определяют следующие факторы: размеры и форма помещения; количество, мощность, режим работы и одновременность использования электрооборудования в помещении; материалы, из которых изготовлены конструктивные элементы помещения и электрооборудования, а также электрооборудование соседних помещений и используемые средства для снижения напряженности электромагнитного поля.

Многие годы единственным подходом к обеспечению электромагнитной совместимости было фиксирование напряженности помехонесущего поля и соответствующее изменение характеристик эксплуатируемых электротехнических элементов. Однако в связи с увеличением насыщенности энергетического помещения новыми типами электрооборудования стало очевидным, что такой подход неэкономичен и связан со значительным ухудшением эффективности электроэнергетической системы. Другой подход к решению электромагнитной совместимости заключается в строгом нормировании и стандартизации параметров аппаратуры и систем в процессе проектирования и конструирования. Такие требования, с одной стороны, должны обеспечить совместимость разнородного электрооборудования, а с другой — должны быть практически достижимыми.

В настоящее время размещение основного электрооборудования диктуется размерами помещения, удобствами компоновки и эксплуатации, а также традиционно сложившимися в практике проектирования представлениями о целесообразности тех или иных конструкций и структур. Можно исходить из того, что электрооборудование закреплено на определенных местах. В этом случае задача состоит в расчете напряженности поля каждого из элементов электрооборудования, находящихся в пределах энергетического помещения. В ряде случаев следует учитывать проникновение электромагнитного поля и из соседних помещений, примыкающих к энергетическому. Если расчеты напряженности электромагнитных полей от столь большой группы электрооборудования будут осуществлены, то можно начертить диаграммы напряженности поля, соответствующие каждой точке энергетического помещения, для различных режимов работы электрооборудования и, в первую очередь, для наиболее энергоемких режимов работы силового электрооборудования. Анализ таких диаграмм позволит выявить зоны как с максимальной, так и с минимальной напряженностью поля. Размещение высокочувствительного к напряженности помехонесущего поля оборудования — рецепторов — желательно осуществлять в зонах с минимальной напряженностью поля. Если объемы таких зон недостаточны для размещения рецепторов, необходимо предусмотреть их увеличение за счет установки электрических фильтров, применения пассивных и активных экранирующих устройств и специального размещения электрооборудования. Если установка электрических фильтров является предметом самостоятельного исследования [4], расчет пассивных экранирующих устройств может быть выполнен по формулам, содержащимся в справочнике, то относительно расчета активных экранирующих устройств и размещения электрооборудования должны быть сделаны некоторые пояснения.

7-2. СРЕДСТВА АКТИВНОГО ЭКРАНИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРООБОРУДОВАНИЯ

Для активного экранирования чаще всего используются компенсационные обмотки. По ним пропускают токи такой величины и направления, чтобы напряженность создаваемых обмотками полей в заданных областях была направлена встречно напряженности помехонесущих полей и по возможности равна ей по значению. Наложение напряженностей двух полей (компенсационного и помехонесущего), встречно направленных и равных по амплитуде, дает результирующее поле с напряженностью, близкой к нулевой. На практике не удается полностью компенсировать напряженность помехонесущего поля в значительном объеме, однако удается снизить результирующую напряженность поля до требуемых пределов.

Результаты теоретических и экпериментальных исследований [1] свидетельствуют, что значение напряженности магнитного поля существенно зависит от геометрии источника и, в частности, от соотношения его длины и наружного диаметра. По мере удаления от поверхности источника доля высших гармонических в пространственном спектре поля уменьшается и на расстояниях, превышающих диаметр оболочки источника, вместо бесконечных рядов для H_{nj} (нормальной составляющей магнитной напряженности в точке $Q_j(q_1, q_2, q_3)$) достаточно удерживать в решениях (1-16) [3] лишь первые восемь членов: три дипольных с коэффициентами a_{10}, a_{11}, b_{11} и пять квадрупольных с коэффициентами a_{20}, a_{21}, a_{22}, b_{21}, b_{22}. Удовлетворительная компенсация магнитного поля будет достигнута, если компенсировать лишь дипольное поле источника.

В первой схеме компенсации (рис. 7-1) по трем взаимно перпендикулярным осям с центром в точке $P(x_0, y_0, z_0)$ — месте расположения диполя, полем которого аппроксимируется поле источника, расположены индуктивные катушки — датчики *6* с ферромагнитными стержнями, соединенные в звезду и питаемые от источника переменного тока *2* через фильтры *3*. Под влиянием поля источника в датчиках *6* индуктируются электродвижущие силы, содержащие вторую гармонику, которая в каждой из цепей, соединенных в трехзвенную цепь звездой, отфильтровывается фильтром двойной частоты *4* и выпрямляется выпрямителем *5*. Три электрических тока суммируются алгебраически. Известно [1], что получаемый таким образом электрический ток пропорционален модулю вектора магнитной напряженности поля, а следовательно, в однородной среде — и магнитного момента. Этот ток усиливается в преобразователе *10* и сдвигается на 180°. Полученный электрический ток пропускается по обмотке *8*, благодаря чему создается компенсирующее магнитное поле с моментом $\mathbf{M}_к$, равным по значению и противоположным по направлению магнитному моменту источника $\mathbf{M}$. Так, если источник работает в определенном режиме и напряженность его магнитного поля меняется по значению и направлению, то оно может быть компенсировано полем жестко закрепленной петлевой обмотки, ориентацию которой определяют предварительными расчетами. В условиях эксплуатации, однако, источник работает в разных режимах, что приводит к изменению его поля по значению и фазе. Поэтому удовлетворительной компенсации напряженности поля источника достигают, если ориентация обмотки в пространстве около источника меняется при изменении режима работы источника. Этого можно добиться за счет установки вспомогательных преобразователей *1* и *9*.

Если учесть, что

$$\mathbf{M}_x = |\mathbf{M}| \sin\varphi \sin\theta; \quad \mathbf{M}_y = |\mathbf{M}| \sin\theta \cos\varphi;$$

$$\mathbf{M}_z = |\mathbf{M}| \cos\theta; \quad |\mathbf{M}| = \sqrt{\mathbf{M}_x^2 + \mathbf{M}_y^2 + \mathbf{M}_z^2},$$

то для выделения углов θ и φ достаточно снять токи со вспомогательных обмоток датчиков *6*, ориентированных по осям y и z (токи пропорциональны моментам $\mathbf{M}_y$ и $\mathbf{M}_z$), подать их в преобразователи *1* и *9* и сравнить их там с током, пропорциональным модулю магнитного момента $\mathbf{M}$. Электрические токи, пропорциональные углам θ и φ, подаются на реверсивные дви-

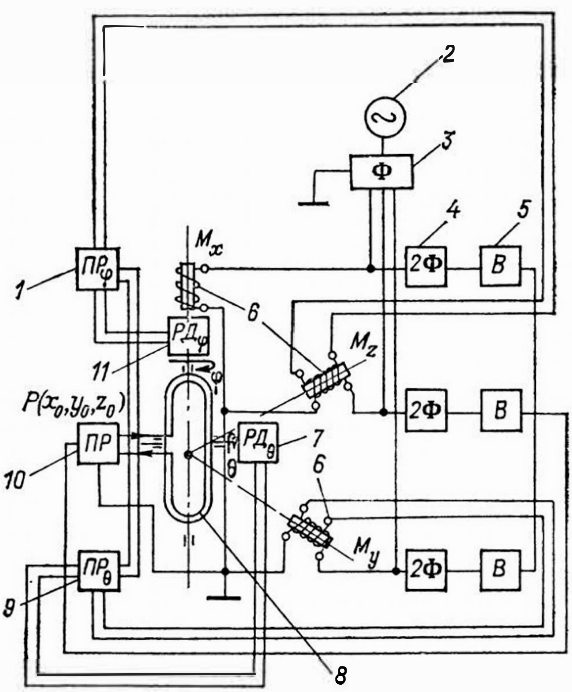


Рис. 7-1. Схема компенсации напряженности магнитного поля с помощью подвижной обмотки

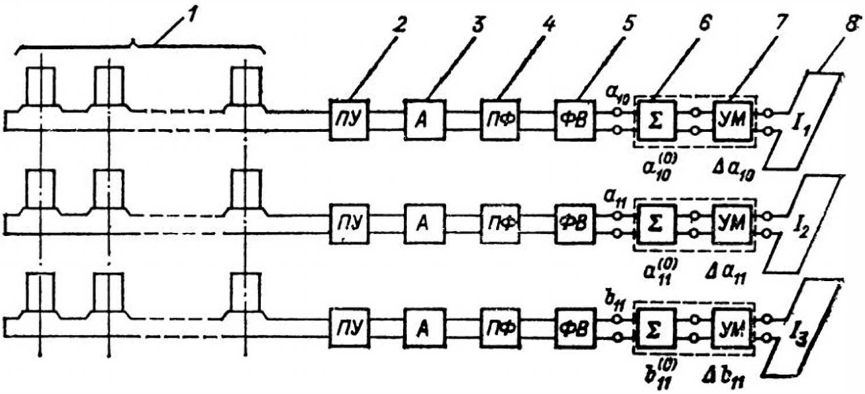


Рис. 7-2. Схема компенсации напряженности магнитного поля с помощью неподвижных обмоток

гатели *7* и *11*, которые осуществляют ориентацию обмотки по θ и φ.

Когда ограниченность размеров помещения не позволяет разместить около источника петлевую обмотку, имеющую возможность ориентации в пространстве, необходимо установить непосредственно на корпусе три обмотки в трех взаимно перпендикулярных плоскостях. В обмотки *8* (рис. 7-2) подают токи I_1, I_2, I_3, пропорциональные составляющим дипольного момента поля источника — a_{10}, a_{11}, b_{11}. Токи снимаются с системы индуктивных катушек-датчиков *1*, размещенных по полной координатной поверхности, охватывающей источник, центр которой находится в геометрическом центре источника (например, сфера через $\Delta\theta = 90°$, $\Delta\varphi = 90°$), и соединенных последовательно в цепи согласно или встречно [3]. В каждую из трех цепей включены предварительный усилитель (*ПУ*) *2*, анализатор гармоник (*А*) *3*, полосовой фильтр (*ПФ*) *4*, фазовращатель (*ФВ*) *5*, усилитель мощности (*УМ*) *7*. Контроль за полнотой компенсации поля осуществляется в сумматорах (Σ) *6* путем сравнения с нормированными величинами $a_{10}^{(0)}$, $a_{11}^{(0)}$, $b_{11}^{(0)}$.

Подход к созданию компенсирующей системы, аналогичной представленной на рис. 7-2, может быть распространен на случай компенсации и квадрупольного момента источника. Дополнительно к трем цепям для компенсации составляющих дипольного магнитного момента источника a_{10}, a_{11}, b_{11} добавляются пять цепей для компенсации составляющих магнитного момента a_{20}, a_{21}, a_{22}, b_{21}, b_{22}, заканчивающихся обмотками типа петли и восьмерки. К сожалению, компенсировать составляющие октупольного магнитного момента a_{30}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, b_{31}, b_{32}, b_{33} и составляющие магнитных моментов более высоких порядков по схеме, аналогичной изображенной на рис. 7-2, не представляется возможным из-за невозможности геометрической интерпретации составляющих магнитных моментов выше квадрупольного [1].

7-3. СНИЖЕНИЕ НАПРЯЖЕННОСТИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ РАЦИОНАЛЬНЫМ РАЗМЕЩЕНИЕМ ЭЛЕКТРООБОРУДОВАНИЯ

Традиционные способы снижения напряженности электромагнитного поля с целью обеспечения электромагнитной совместимости разнородного радио- и электротехнического оборудования, такие, как активное и пассивное экранирование, установка электрических фильтров, иногда могут оказаться малоэффективными и экономически невыгодными, так как увеличиваются массо-габаритные показатели, металлоемкость конструкций, снижаются энергетические показатели защищаемого оборудования из-за изменения параметров электрических цепей и т. д. В таких случаях в качестве дополнительной меры по обеспечению электромагнитной совместимости оборудования в энергетическом помещении можно рекомендовать перестановку отдельных элементов или групп электрооборудования, с тем чтобы новое размещение приводило к взаимокомпенсации напряженности внешних электромагнитных полей в заданных зонах.

Рациональное размещение электрооборудования может оказаться определяющим, если площадь под электрооборудование не лимитирована проектными требованиями.

Для выполнения мероприятий по рациональному размещению электрооборудования необходимо иметь, во-первых, метод расчета напряженности электромагнитного поля группы источников, расположенных как в энергетическом помещении, так и в примыкающих помещениях, а во-вторых, — методы формализации и алгоритмы решения оптимизационных задач размещения. Напряженность магнитного поля, создаваемого источниками в некоторой области V, находится с помощью скалярного потециала v, который для квазистационарного низкочастотного поля ($f < 10^4$ Гц) определяется из неоднородного уравнения Лапласа

$$\Delta v = \Phi \tag{7-1}$$

с условиями на участках Γ_j ($j = 1, 2, \ldots$) границы Γ области V:

$$B_j v \big|_{\Gamma_j} = \varphi_j, \tag{7-2}$$

где B_j — операторы граничных условий; φ_j — заданные функции; Φ — характеристики источников.

По существу требуется найти распределение источников Φ по условиям, определенным назначением, условиями эксплуатации и конструкцией электроэнергетической установки. В области V необходимо разместить источники поля ($i = 1, 2, \ldots, m$), полюсы O_i которых имеют координаты $(q_1^{(i)}, q_2^{(i)}, q_3^{(i)})$. Положение источников S_i в области V относительно неподвижной системы координат (q_1, q_2, q_3), связанной с областью V, определяется вектором

$$\mathbf{Z} = \{q_1^{(1)}, q_2^{(1)}, q_3^{(1)}, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1;\ q_1^{(2)}, q_2^{(2)}, q_3^{(2)}, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \ldots; \\ q_1^{(i)}, q_2^{(i)}, q_3^{(i)}, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i; \ldots; q_1^{(m)}, q_2^{(m)}, q_3^{(m)}, \alpha_m, \beta_m, \gamma_m\}, \quad (7\text{-}3)$$

где $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i\,(i \in [1; m])$ — углы ориентации i-го источника.

Ограничения на количественные характеристики электромагнитного поля в заданной системе точек можно представить в виде

$$v(q_1, q_2, q_3, t; \mathbf{Z}) \leqslant (\geqslant)\, v_k^* \qquad (k \in [1; p]), \quad (7\text{-}4)$$

где P_k — точки контроля характеристик поля с координатами $(q_1^{(k)}, q_2^{(k)}, q_3^{(k)})$ при $k \in [1; p]$.

Контроль характеристик магнитного поля может осуществляться как непрерывно во времени t, так и в заданные его промежутки.

Кроме ограничений, наложенных на качественные или количественные характеристики поля, в процессе поиска вектора $\mathbf{Z}$ необходимо удовлетворить условиям размещения источников поля в области V. К такого рода ограничениям относятся условия взаимного размещения источников электромагнитного поля, принадлежности источников поля области V и непересечения источников поля с областями запрета $k_t \in V$ $(t=1, 2, \ldots)$. Если между источниками электромагнитного поля S_i и S_j задано кратчайшее расстояние l_{ij}, между источником S_i и границей Г области V — расстояние l_i, а между источником S_i и границей k_t области запрета K_t — расстояние l_{it}, то эти условия представляются соответственно в виде неравенств:

$$\rho_{ij}(S_i, S_j) - l_{ij} \geqslant 0, \quad i = j;\ i, j = 1, 2, \ldots, m; \\ \rho_i(R^3 \setminus V, S_i) - l_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m; \quad (7\text{-}5) \\ \rho_{it}(S_i, K_t) - l_{it} \geqslant 0, \quad i \in [1; m];\quad t \in [1; n],$$

где R^3 — трехмерное евклидово пространство; $\rho_{it}, \rho_i, \rho_{it}$ — кратчайшие расстояния между источниками S_i и S_j, между источником S_i и границей Г области V, между источником S_i и границей k_t области запрета K_t. Ограничения на положение источников электромагнитного поля в области V представляются неравенствами:

$$f_{ij}(q_1^{(i)}, q_2^{(i)}, q_3^{(i)}, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i;\ q_1^{(j)}, q_2^{(j)}, q_3^{(j)}, \alpha_j, \beta_j, \gamma_j) \geqslant 0, \\ i \neq j;\ i, j \in [1; m]; \quad (7\text{-}6) \\ \psi_i(q_1^{(i)}, q_2^{(i)}, q_3^{(i)}, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i; l_i) \geqslant 0, \quad i \in [1; m]; \\ \eta_{it}(q_1^{(i)}, q_2^{(i)}, q_3^{(i)}, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i; l_{it}) \geqslant 0, \quad i \in [1; m];\quad t \in [1; m].$$

В общем случае функция цели **Z** зависит от искомого вектора:

$$\varkappa(\mathbf{Z}) = \varkappa\bigl(q_1^{(1)}, q_2^{(1)}, q_3^{(1)}, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1;\ \ q_1^{(2)}, q_2^{(2)}, q_3^{(2)}, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2;\ \ldots;\ q_1^{(i)}, q_2^{(i)}, q_3^{(i)}, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i;\ \ldots;\ q_1^{(m)}, q_2^{(m)}, q_3^{(m)}, \alpha_m, \beta_m, \gamma_m\bigr). \tag{7-7}$$

Основная оптимизационная задача сводится к нахождению

$$\operatorname{Extr} \varkappa(\mathbf{Z}), \qquad \mathbf{Z} \in W, \tag{7-8}$$

где W — область, определяемая системой неравенств (7-4) и (7-6).

Из общего вида основной оптимизационной задачи (7-8) можно сделать вывод о том, что математическая модель, адекватно описывающая ее, относится к классу задач математического программирования. В результате ее решения определяется вектор **Z**, характеризующий положение источников в области V.

Следует отметить особенности основной оптимизационной задачи, вытекающие из ее общей математической постановки (7-8):

1. Пространство параметров, в котором необходимо определить экстремальное значение функции цели $\varkappa(\mathbf{Z})$ основной задачи, имеет размерность $6m$, где m — число размещаемых источников. Для ориентированных источников искомый вектор $\mathbf{Z} \in R^{3m}$. На практике общее число источников $m \gg 1$, что приводит рассматриваемый класс задач к задачам большой размерности.

2. Количество неравенств (7-4), (7-6), описывающих область определения W функции цели $\varkappa(\mathbf{Z})$, зависит квадратично от числа размещенных источников:

$$N = 0{,}5m(m-1) + m(n+1) + p,$$

где m — число размещаемых источников; n — число областей запрета k_t ($t \in [1; n]$); p — число ограничений на характеристики электромагнитного поля.

3. Каждое из неравенств вида (7-4) в общем случае связывает не менее чем $6m+4$ переменных, а неравенства вида (7-6) — не менее двенадцати или шести переменных, соответственно.

4. Поиск оптимального размещения источников электромагнитного поля необходимо осуществлять на основе решения соответствующих задач математической физики, поскольку результирующее поле группы источников поля зависит от положения каждого из источников и их взаимовлияния. Поэтому рассматриваемый класс задач относится к задачам оптимизации систем многосвязного управления.

5. Ввиду того что размещение источников осуществляется с учетом системы ограничений, наложенных на качественные или количественные характеристики поля, данный класс задач при-

мыкает к задачам идентификации сложных систем. Чтобы предложить общую схему решения основной задачи, требуется построить неравенства вида (7-4) и (7-6), определяющие область допустимых решений W.

Основные этапы построения алгоритма решения задачи (7-8) состоят в формализации задачи, в синтезе допустимых размещений векторов $\mathbf{Z} \in W$, в поиске локального экстремума, в переборе локальных экстремумов, в выделении глобального значения функций цели и соответствующего вектора размещения $\mathbf{Z}$.

При минимизации напряженности электрических $\mathbf{E}_j$ или магнитных $\mathbf{H}_j$ полей функция цели может быть представлена в виде

$$\varkappa(W) = \operatorname{maxmod}\left\{\begin{matrix}\mathbf{E}_j\\ \mathbf{H}_j\end{matrix}\right\}, \quad j \in [1;\ k]. \tag{7-9}$$

При решении практических задач целесообразно разбить общую задачу (7-1)—(7-7) на несколько подзадач. Это связано с тем, что потребности практики требуют оптимизации и контроля определенных составляющих векторов напряженности поля [1].

ПРИЛОЖЕНИЕ

РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Функция Лежандра.

Функциями Лежандра называются функции, удовлетворяющие уравнению Лежандра [15]: $P_n^m(z)$ и $Q_n^m(z)$ — присоединенные функции Лежандра первого и второго рода.

Для присоединенных функций Лежандра существуют следующие рекуррентные соотношения:

$$(2n+1)zP_n^m(z) = (n+m)P_{n-1}^m(z) + (n-m+1)P_{n+1}^m(z), \quad -1 \leqslant z \leqslant 1; \tag{П-1}$$

$$(2n+1)(1-z^2)^{0,5}P_n^m(z) = P_{n-1}^{m+1}(z) - P_{n+1}^{m+1}(z), \quad -1 \leqslant z \leqslant 1; \tag{П-2}$$

$$(1-z^2)^{0,5}\frac{d}{dz}P_n^m(z) = 0{,}5(n+m)(n-m+1)P_n^{m-1}(z) - 0{,}5P_n^{m+1}(z), \quad -1 \leqslant z \leqslant 1; \tag{П-3}$$

$$P_n^{m+1}(z) + \frac{2mz}{\sqrt{1-z^2}}P_n^m(z) + (n+m)(n-m+1)P_n^{m-1}(z) = 0, \quad -1 \leqslant z \leqslant 1; \tag{П-4}$$

$$(2n+1)zP_n^m(z) = (n+m)P_{n-1}^m(z) + (n-m+1)P_{n+1}^m(z), \quad z > 1; \tag{П-5}$$

$$(2n+1)\sqrt{z^2-1}\,P_n^m(z)=P_{n+1}^{m+1}(z)-P_{n-1}^{m+1}(z),\qquad z>1; \qquad (\text{П-6})$$

$$(2n+1)\left(z^2-1\right)^{0,5}P_n^m(z)=(n-m+1)(n-m+2)P_{n+1}^{m-1}(z)-$$
$$-(n+m)(n+m-1)P_{n-1}^{m-1}(z),\qquad z>1; \qquad (\text{П-7})$$

$$\left(z^2-1\right)^{0,5}\frac{d}{dz}P_n^m(z)=0{,}5(n+m)(n-m+1)P_n^{m-1}(z)+0{,}5P_n^{m+1}(z),$$
$$z>1; \qquad (\text{П-8})$$

$$P_n^{m+1}(z)+\frac{2mz}{(z^2-1)^{0,5}}P_n^m(z)=(n+m)(n-m+1)P_n^{m-1}(z),\quad z>1; \qquad (\text{П-9})$$

$$Q_n^{m+1}(z)+\frac{2mz}{(z^2-1)^{0,5}}Q_n^m(z)=(n+m)(n-m+1)Q_n^{m-1}(z),\qquad z>1; \qquad (\text{П-10})$$

$$\left(z^2-1\right)\frac{d}{dz}P_n^m(z)=\frac{n(n-m+1)}{2n+1}P_{n+1}^m(z)-\frac{(n+1)(n+m)}{2n+1}P_{n-1}^m(z); \qquad (\text{П-11})$$

$$z^2P_n^m(z)=\frac{(n+m)(n+m-1)}{(2n+1)(2n-1)}P_{n-2}^m(z)+\frac{2n^2+2n-2m^2-1}{(2n-1)(2n+3)}\times$$
$$\times P_n^m(z)+\frac{(n-m+1)(n-m+2)}{(2n+1)(2n+3)}P_{n+2}^m(z). \qquad (\text{П-12})$$

Функции Бесселя.

Функциями Бесселя называются функции, удовлетворяющие уравнению Бесселя [15]: $I_\nu(z)$ — функция Бесселя первого рода; $N_\nu(z)$ — функция Бесселя второго рода (функция Неймана).

На практике часто используются специальные комбинации функций $I_\nu(z)$ и $N_\nu(z)$:

$$H_\nu^{(1)}(z)=I_\nu(z)+iN_\nu(z);\quad H_\nu^{(2)}(z)=I_\nu(z)-iN_\nu(z), \qquad (\text{П-13})$$

которые называются функциями Ханкеля или функциями Бесселя третьего рода. Введем для функций Бесселя общее обозначение

$$Z_\nu(z)=I_\nu(z);\quad N_\nu(z);\quad H_\nu^{(i)}(z),$$

тогда для каждой из этих функций выполняются рекуррентные соотношения

$$(\nu/z)\,Z_\nu(z)=0{,}5\left[Z_{\nu-1}(z)+Z_{\nu+1}(z)\right]; \qquad (\text{П-14})$$

$$\frac{d}{dz}Z_\nu(z)=0{,}5\left[Z_{\nu-1}(z)-Z_{\nu+1}(z)\right]. \qquad (\text{П-15})$$

Заменим функции Бесселя и их производные разложениями Ханкеля, справедливыми при больших значениях аргумента, т. е. когда $|z|\gg 1$ и $|z|\gg n$. Запишем выражения асимптотических рядов Ханкеля в виде

$$I_n(z)=[2/(\pi z)]^{0,5}\left[P_n(z)\cos\beta-Q_n(z)\sin\beta\right];$$
$$Y_n(z)=[2/(\pi z)]^{0,5}\left[P_n(z)\sin\beta+Q_n(z)\cos\beta\right],$$

где $\beta = z - (n\pi/2) - (\pi/4)$; $\quad P_n(z) \approx 1 - \frac{(4n^2-1)(4n^2-3)}{2!(8z)^2} + $
$$+ \frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3)(4n^2-5^2)(4n^2-7^2)}{4!(8z)^4} - \ldots;$$

$$I'_n(z) = -[2/(\pi z)]^{0,5}\left[P_n^1(z)\sin\beta + Q_n^1(z)\cos\beta\right];$$

$$Y'_n(z) = [2/\pi z]^{0,5}\left[P_n^1(z)\cos\beta - Q_n^1(z)\sin\beta\right];$$

$$P_n^1(z) \approx 1 - \frac{(4n^2-1^2)(4n^2+3\cdot 5)}{2!(8z)^2} +$$

$$+ \frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)(4n^2-5^2)(4n^2+7\cdot 9)}{4!(8z)^4} - \ldots;$$

$$Q_n^1(z) = \frac{4n^2+1\cdot 3}{1!\,8z} - \frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)(4n^2+5\cdot 7)}{3!(8z)^3} + \ldots$$

Выражения для M_{1s}, M_{2s}, M_{1w}, M_{2w} в формулах (3-81) записываются в виде:

$$M_{1s} = \frac{n^2}{x_1x_2}(\nu_{1,0}-1)[P_n(x_2)P_n(x_1) + Q_n(x_2)Q_n(x_1)] +$$
$$+ \frac{n}{x_2}(\nu_{1,0}-1)[P_n(x_2)Q_{n+1}(x_1) - Q_n(x_2)P_{n+1}(x_1)] +$$
$$+ \frac{n}{x_1}(\nu_{1,0}-1)[P_{n-1}(x_2)Q_n(x_1) - Q_{n-1}(x_2)P_n(x_1)] -$$
$$- [P_{n-1}(x_2)P_{n+1}(x_1) + Q_{n-1}(x_2)Q_{n+1}(x_1)];$$

$$M_{2s} = -\frac{n^2}{x_1x_2}(\nu_{1,0}-1)[P_n(x_2)Q_n(x_1) - Q_n(x_2)P_n(x_1)] +$$
$$+ \frac{n}{x_2}(\nu_{1,0}-1)[P_n(x_2)P_{n+1}(x_1) - Q_n(x_2)P_{n+1}(x_1)] +$$
$$+ \frac{n}{x_1}(\nu_{1,0}-1)[P_{n-1}(x_2)P_n(x_1) + Q_{n-1}(x_2)Q_n(x_1)] +$$
$$+ [P_{n-1}(x_2)Q_{n+1}(x_1) - Q_{n-1}(x_2)P_{n+1}(x_1)];$$

$$M_{1w} = -\frac{n^2}{x_1x_2}(\nu_{1,0}-1)[P_n(x_2)P_n(x_1) + Q_n(x_2)Q_n(x_1)] +$$
$$+ \frac{n}{x_2}(\nu_{1,0}-1)[P_n(x_2)Q_{n-1}(x_1) - Q_n(x_2)P_{n-1}(x_1)] -$$
$$- \frac{n}{x_1}(\nu_{1,0}-1)[P_{n-1}(x_2)Q_n(x_1) - Q_{n-1}(x_2)P_n(x_1)] -$$
$$- [P_{n-1}(x_2)P_{n-1}(x_1) + Q_{n-1}(x_2)Q_{n-1}(x_1)];$$

$$M_{2w} = \frac{n^2}{x_1x_2}(\nu_{1,0}-1)[P_n(x_2)Q_n(x_1) - Q_n(x_2)P_n(x_1)] +$$
$$+ \frac{n}{x_2}(\nu_{1,0}-1)[P_n(x_2)P_{n-1}(x_1) + Q_n(x_2)Q_{n-1}(x_1)] -$$
$$- \frac{n}{x_1}(\nu_{1,0}-1)[P_{n-1}(x_2)P_n(x_1) + Q_{n-1}(x_2)Q_n(x_1)] +$$
$$+ [P_{n-1}(x_2)Q_{n-1}(x_1) - Q_{n-1}(x_2)P_{n-1}(x_1)].$$

Модифицированные функции Бесселя.

Модифицированными функциями Бесселя называются функции, которые удовлетворяют уравнению Бесселя мнимого аргумента [15]: $I_\nu(z)$—модифицированная функция Бесселя первого рода; $K_\nu(z)$ — функция Макдональда (модифицированная функция Бесселя второго рода). Для модифицированных функций Бесселя выполняются следующие рекуррентные соотношения:

$$(\nu/z)\, I_\nu(z) = 0{,}5\,[I_{\nu-1}(z) - I_{\nu+1}(z)];$$

$$(d/dz)\, I_\nu(z) = 0{,}5\,[I_{\nu-1}(z) + I_{\nu+1}(z)];$$

$$(\nu/z)\, K_\nu(z) = -0{,}5\,[K_{\nu-1}(z) + K_{\nu+1}(z)];$$

$$(d/dz)\, K_\nu(z) = -0{,}5\,[K_{\nu-1}(z) + K_{\nu+1}(z)].$$

В справочнике употреблены следующие модифицированные функции:

$$I_{1/2}(z) = [2/(\pi z)]^{0,5}\,\mathrm{sh}\, z; \qquad I_{-1/2}(z) = [2/(\pi z)]^{0,5}\,\mathrm{ch}\, z;$$

$$I_{3/2}(z) = [2/(\pi z)]^{0,5}\left(\mathrm{ch}\, z - \frac{\mathrm{sh}\, z}{z}\right); \quad I_{-3/2}(z) = [2/(\pi z)]^{0,5}\left(\mathrm{sh}\, z - \frac{\mathrm{ch}\, z}{z}\right);$$

$$I_{-5/2}(z) = [2/(\pi z)]^{0,5}\left(\mathrm{ch}\, z - \frac{3}{z}\,\mathrm{sh}\, z + \frac{3}{z^2}\,\mathrm{ch}\, z\right);$$

$$K_{-1/2}(z) = [2/(\pi z)]^{0,5}\, e^{-z}; \quad K_{-5/2}(z) = [2/(\pi z)]^{0,5}\, e^{-z}\left(1 + \frac{3}{z} + \frac{3}{z^2}\right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Аполлонский С. М.** Расчет электромагнитных экранирующих оболочек.— Л.: Энергоиздат, 1982.— 144 с.

2. **Аполлонский С. М., Ерофеенко В. Т.** Электромагнитные поля в экранирующих оболочках.— Минск: БГУ, 1988.— 220 с.

3. **Аполлонский С. М., Логинова И. Д.** Построение моделирующих устройств для исследования внешних физических полей источников//Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт.— 1979.— № 1.— С. 104—110.

4. **Гроднев И. И.** Электромагнитное экранирование в широком диапазоне частот.— М.: Связь, 1972.— 111 с.

5. **Демидович Б. П., Марон И. А.** Основы вычислительной математики.— М.: Наука, 1965.— 664 с.

6. **Емельянов А. В., Державина А. Ю.** Цилиндрические экраны при промышленной частоте помехонесущего электромагнитного поля//Изв. АН СССР, Энергетика и транспорт.— 1975.— № 4.— С. 66—74.

7. **Жуков С. В.** О граничных условиях для определения переменных магнитных полей тонких металлических оболочек//ЖТФ.— 1969.— Т. 39.— № 7. — С. 1149—1154.

8. **Жуков С. В., Цейтлин Л. А.** Сфероидальные электромагнитные экраны//Радиотехника.— 1971.— Т. 26.— № 8.— С. 50—55.

9. **Заруди М. Е.** Эллипсоидальный магнитостатический экран//Электричество.— 1984.— № 1.— С. 29—32.

10. **Каден Г.** Электромагнитные экраны в высокочастотной технике и технике электросвязи.— М.; Л.: Госэнергоиздат, 1957.— 327 с.

11. **Конторович М. И.** Усредненные граничные условия для сетки, состоящей из непараллельных и непрямолинейных проводников, расположенных на неплоской поверхности//Радиотехника и электроника.— 1972.— № 6.— С. 1161—1170.

12. **Куренев С. И., Волков М. Г.** Экранирование внешнего однородного статического поля полым эллиптическим цилиндром//Изв. вузов. Электромеханика.— 1960.— № 8.— С. 3—7.

13. **Лангваген Е. Н.** Расчет магнитных экранов, подмагничиваемых переменным полем//Изв. вузов. Электромеханика. — 1969. — № 12. — С. 1306—1312.

14. **Математическая энциклопедия.**— М.: Советская энциклопедия, 1984.— Т. 4.— 1216 с.

15. **Морс Ф., Фешбах Г.** Методы теоретической физики.— М.: Изд-во иностр. лит, 1958.— Т. 1.— 896 с; 1960.— Т. 2.— 930 с.

16. **Нейман Л. Р.** Поверхностный эффект в ферромагнитных телах.— М.; Л.: Госэнергоиздат, 1949.— 190 с.

17. **Пентегов И. В., Тарасенко О. А.** Расчет эффективности экранирования плоскими экранами//Техническая электродинамика.— 1985.— № 2.— С. 8—12.

18. **Ройтгарц М. Б.** Приближенные граничные условия на тонких ферромагнитных оболочках//Тезисы докладов молодых специалистов.— Л.: Энергия, 1978.— С. 113—114.

19. **Ронинсон А. Д.** Определение магнитостатнческих полей тонких ферромагнитных оболочек, ограниченных поверхностями второго порядка//Труды ТПИ.— 1976.— № 408.— С. 45—48.
20. **Сапожников В. Б., Боброва М. Н.** К вопросу об экранирующем действии цилиндра с эллиптическим профилем//Труды СФТИ при ТГУ.— 1970.— № 52.— С. 31—33.
21. **Стеблев Ю. И.** Расчет магнитных экранов сложной формы//Электричество.— 1979.— № 12.— С. 28—32.
22. **Титко А. И.** Экранирующие свойства электропроводной структуры в виде беличьей клетки//Изв. вузов. Электромеханика.— 1982.— № 12.— С. 30—32.
23. **Туровский Я.** Техническая электродинамика.— М.: Энергия, 1974.— 488 с.
24. **Франке В. А.** Некоторые методы расчета электромагнитных экранов//Труды института охраны труда ВЦСПС [Сборник]. 1962.— № 5.— М.: Профиздат.— С. 57—66.
25. **Цейтлин Л. А.** Тороидальный электромагнитный экран//Электричество.— 1978.— № 7.— С. 56—60.
26. **Цицикян Г. Н., Эрин В. Н.** Определение эффективности цилиндрических экранов при квазистационарном рассмотрении установившегося электромагнитного процесса//Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт.— 1975.— № 3.— С. 78—85.
27. **Шапиро Д. Н.** Основы теории электромагнитного экранирования.— Л.: Энергия, 1975.— 108 с.
28. **Adams W. S., Mills A. N.** Electromagnetic shielding in the near field// 10-th National Symposium on EMC. — Wash.: Seatle. 1968. — P. 317—329.
29. **Bannister P. R.** New Theoretical expressions for Predicting Shielding Effectiveness for the Plane Shield Case//IEEE Trans. of EMC. — 1968. — Vol. EMC-10. — № 1. — P. 2—7.
30. **Casey Kendall F.** Low-frequency Electromagnetic Penetration of Loades Apertures//IEEE Trans. on EMC. — 1981. — Vol. 23. — № 4. — P. 367—377.
31. **Cathey W. T. Ir.** Approximate expressions for field penetration through circular apertures//IEEE Trans. on EMC. — 1983. — Vol. 25. — № 3. — Pt. 2. — P. 339—445.
32. **Chung-Chi-Cha, Harrington R. F.** Electromagnetic Transmission through an Annular Aperture in an Infinite Conducting Screen//AEÜ.—1981.—Bd. 35.— № 4. — S. 167—172.
33. **Cooley W. W.** Low-frequency shielding Effectiveness of Nonuniform Enclosures//IEEE Trans. on EMC. — 1968. — Vol. EMC-10. — № 1. — P. 34—43.
34. **Franceschetti G.** Fundaments of Steady — state and Transient Electromagnetic Fields in Shielding Enclosures//IEEE Trans. on EMC. — 1979. — Vol. EMC-21. — № 4. — P. 335—348.
35. **Greifinger C., Grefinger P. S., Lynn W. H.** Shielding of ELF Magnetic-Dipole Fields by Ferromagnetic Cylindrical shells//IEEE Trans. on EMC-23. — 1981. — № 1. — P. 2—12.
36. **Haubitzer W.** Schirmwirkung und Wirbelstromverluste einer leitenden Hohlkugel im magnetischen Wechselfeld//Z. elektr. Inform. und Energietechnik.— 1974. — Bd. 4. — № 2. — Leipzig. — S. 97—104.
37. **Jaggard D. L.** An Application of Isoperimetric Inequalities to Transmission of Scalar Waves through Small Apertures//Appl. Phys. — 1979. — Vol. 18. — P. 149—154.
38. **Kaden H.** Magnetostatische Schirmwirkung dünnwandiger, gestreckter Rotations ellipsoide//Frequenz. — 1969. — Bd. 23. — № 4. — S. 109—113.
39. **Kaden H.** Shielding Effect of Thin-Walled Metal Cylinders of Rectangular Cross Section//Siemens Forsch. and Entwicklung. — 1977. — Bd. 6. — № 2. — Berlin. — S. 103—109.
40. **Kim S. B.** Alternating current losses in hollow cylinders. — Journ. of Appl. Phys. — 1971. — Vol. 42. — № 2. — P. 550—553.
41. **Latham R. W., Lee K. S. H.** Theory of induction shielding//Can. J. of Physics. — 1968. — Vol. 46. — № 16. — P. 1745—1752.

42. **Loh Y. P.** Shielding Theory of Coaxial Cylindrical structures//IEEE Trans. on EMC. — 1968. — Vol. EMC-10. — № 1. — P. 16—28.
43. **Mager A.** Magnetic Shielding//IEEE Trans. Mag. — 1970. — Vol. 6. — № 6. — P. 67—75.
44. **Mager A.** Magnetostatische Abschirmfaktoren von Zylindern mit rechteckigen Querschnitt//Physica. — 1975. — Vol. 80B. — P. 451—463.
45. **Mei K., Van Bladel J.** Low-frequency scattering by rectangular cylinders//IEEE Trans. Antennas and Propag. — 1963. — Vol. Ap-11. — P. 52—56.
46. **Miller D. A., Bridges J. E.** Geometrical effects on shielding effectiveness at low frequences//IEEE Trans. on EMC. — 1966. — Vol. EMC-8. — P. 174—185.
47. **Nalesso G. F., Tenti P.** On the Diffusion of Electromagnetic Field through a system of coaxial Cylindrical Conductors//Arch. Elektrotechn. (W. Berlin). — 1982. — Bd. 64. — № 6. — S. 325—333.
48. **Patton B. J.** Room-size enclosure for geomagnetic shielding//In 1970 IEEE on EMC. Symp. Rec. — P. 89—96.
49. **Rizk F. A. M.** Low-Frequency shielding Effectiveness of a Double Cylinder Enclosure. — IEEE Trans. Electromagn. Compatib. — 1977, Vol. 19. — № 1. — P. 14—21.
50. **Schelkunoff S. A.** Electromagnetic waves//D. van Nostrand Company. — New York; Toronto; London. — 1948. — P. 188—241.
51. **Schulz R. B.** Shielding in Practical Design for Electromagnetic Compatibility//R. F. Fiechi, Ed. — New York: Hayden, 1971. — P. 69—92.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Справочное издание

СТАНИСЛАВ МИХАЙЛОВИЧ АПОЛЛОНСКИЙ

СПРАВОЧНИК
по расчету
электромагнитных экранов

Художественный редактор *Т. Ю. Теплицкая*
Технический редактор *Н. А. Минеева*
Корректор *Н. Д. Быкова*

ИБ № 1810

Сдано в набор 26.01.88. Подписано в печать 31.03.88. М-26266. Формат 60×90$^1/_{16}$. Бумага книжно-журнальная. Печать высокая. Усл. печ. л. 14. Усл. кр.-отт. 14,25. Уч.-изд. л. 16,29. Тираж 11 000 экз. Заказ № 880. Цена 85 к.

Энергоатомиздат, Ленинградское отделение. 191065 Ленинград, Д-65, Марсово поле, 1

Ленинградская типография № 2 головное предприятие ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.

85 коп.

ISBN 5-283-04390-8